

兵庫医科大学 数学

2025年 1月 29日実施

1 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

- (1) 不等式 $\log_4 |x - 1| + 2 > \log_2 x$ を解け。
- (2) 関数 $y = e^{ax} \sin bx$ は方程式 $y'' - 2y' + 5y = 0$ を満たす。実数の定数 a, b の値を求めよ。
- (3) 以下のそれぞれの場合、 x, y, z の整数解の組の総数を求めよ。
 - (a) 方程式 $x + y + z = 20$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組
 - (b) 方程式 $x + y + z = 20$ を満たす 1 以上の整数 x, y, z の組
- (4) $0 \leq x < \pi, 0 \leq y < \pi, x - y = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $\sin^2 x + \cos^2 y$ の最大値、最小値と、そのときの x の値を求めよ。
- (5) 正方形 ABCD があり、辺 AB を斜辺にもつ直角三角形 ABF が正方形の外側にある。正方形の対角線の交点を E, $AF = 6, BF = 8$ のとき、線分 EF の長さを求めよ。

解答

- (1) 真数条件より、 $x > 0$ かつ $x \neq 1$ 。両辺の底を 4 に揃えると、

$$\log_4 |x - 1| + \log_4 16 > \log_4 x^2 \iff \log_4 16|x - 1| > \log_4 x^2$$

底は 1 より大きいので、 $16|x - 1| > x^2 \dots\dots (*)$ である。 $y = x^2$ と $y = 16|x - 1|$ の交点を考えると、

- $x > 1$ のとき

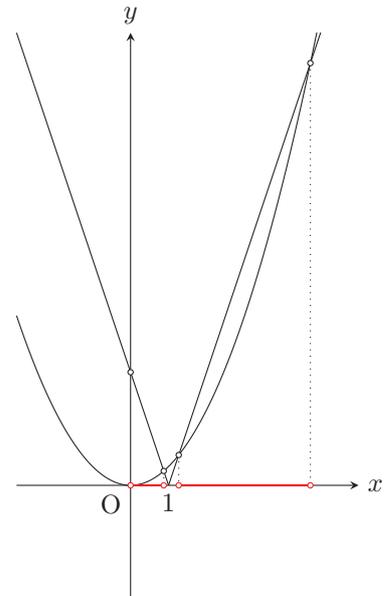
$$\begin{aligned} x^2 &= 16(x - 1) \iff x^2 - 16x + 16 = 0 \\ &\iff x = 8 \pm 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

- $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} x^2 &= 16(-x + 1) \iff x^2 + 16x - 16 = 0 \\ &\iff x = -8 \pm 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるので、 $x > 0$ におけるグラフは右のようになる。
したがって不等式 (*) を解くと、

$$0 < x < -8 + 4\sqrt{5}, 8 - 4\sqrt{3} < x < 8 + 4\sqrt{3}$$



- (2) $y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx,$
 $y'' = (a^2 - b^2)e^{ax} \sin bx + 2abe^{ax} \cos bx$ であるので、

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y &= 0 \\ \iff e^{ax} \{ (a^2 - b^2 - 2a + 5) \sin bx + (2ab - 2b) \cos bx \} &= 0 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$e^{ax} > 0$ であるので、 $(a^2 - b^2 - 2a + 5) \sin bx + (2ab - 2b) \cos bx = 0$ が任意の実数 x で成り立てばよい。

- $b = 0$ のとき
①式は恒等的に $0 = 0$ となり, 任意の実数 a で成り立つ.
- $b \neq 0$ のとき
これが任意の実数 x で成り立つためには,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + 5 = 0 \cdots \textcircled{2} \\ 2b(a - 1) = 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が必要十分である. ③より $a = 1$ が得られるので, これを②に代入することにより,
 $-b^2 + 4 = 0 \iff b = \pm 2$ となる.

以上より求める値は, $b = 0$ のとき a は任意の実数, $b \neq 0$ のとき $(a, b) = (1, \pm 2)$.

- (3) (a) 20個の○と2本の|を並べる場合の数と一致するので, ${}_{22}C_2 = 231$ 組.
 (b) 20個の○の間に2本の|を割りこませる場合の数と一致するので, ${}_{19}C_2 = 171$ 組.
- (4) $y = x - \frac{\pi}{3}$ ($-\frac{\pi}{3} \leq x < \pi$) を代入することにより,

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \sin^2 x + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin^2 x + \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)^2 \\ &= \frac{7}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x \\ &= \frac{7}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x - \frac{3}{4} \cos 2x + 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 \end{aligned}$$

ここで, $-\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$ であるので, $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, つまり $x = \frac{5\pi}{12}$ で最大値 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ をとり,
 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, つまり $x = \frac{11\pi}{12}$ で最小値 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる.

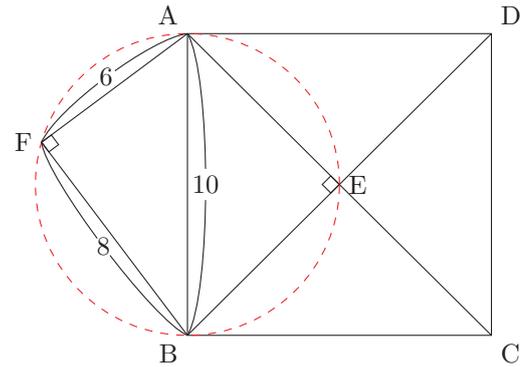
別解

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2y) \\ &= 1 + \sin(x + y) \sin(x - y) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x - y) \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形してもよい. (以下略)

(5) 問題文の図は右図のようになる.

三角形 ABF において, 三平方の定理を用いると,
 $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ であるので, 正方形 ABCD の一
 辺の長さは 10 と分かる. また, $\angle AFB = \angle AEB = 90^\circ$
 であるので, 四角形 AFBE は円に内接することが分か
 る. $AE = BE = 5\sqrt{2}$ であることから, トレミーの定理
 を用いると,



$$AB \cdot EF = AF \cdot BE + BF \cdot AE$$

$$\iff 10EF = 6 \cdot 5\sqrt{2} + 8 \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\iff EF = 7\sqrt{2}$$

別解

$\angle BAF = \theta$ とすると, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ である.

$$\cos \angle EAF = \cos(\theta + 45^\circ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

であるので, 三角形 AEF に余弦定理を用いることにより,

$$EF^2 = 36 + 50 - 2 \cdot 6 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = 86 + 12 = 98$$

であるので, $EF = 7\sqrt{2}$ を得る.

的中!!

2025 年 1 月実施 兵庫医科大学対策テキスト

$x + y + z \leq 16$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ を満たす整数の組 (x, y, z) は 組ある.

(3) について

という考え方が的中!

2 濃度 $a\%$ の食塩水 200g が入っている容器 A と、濃度 $b\%$ の食塩水 300g が入っている容器 B がある。A より 100g の食塩水をとってそれを B に移し、よくかき混ぜた後に同量を A に戻すとする。この操作を n 回繰り返したときの A と B の食塩水の濃度を求めたい。以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方も記入すること。

- (1) 容器 A と容器 B に最初にあった食塩の量の和を求めよ。
 (2) $n(\geq 1)$ 回の操作の後、容器 A の濃度が $x_n\%$ 、容器 B の濃度が $y_n\%$ になっていたとする。 x_n および y_n を、それぞれ、 x_{n-1} と y_{n-1} を用いて表したい。以下の $\boxed{\text{ア}} \sim \boxed{\text{エ}}$ に適当な数を入れよ。

$$\begin{cases} x_n = \boxed{\text{ア}}x_{n-1} + \boxed{\text{イ}}y_{n-1} \\ y_n = \boxed{\text{ウ}}x_{n-1} + \boxed{\text{エ}}y_{n-1} \end{cases}$$

- (3) この操作を何回繰り返した後でも、容器 A と容器 B の食塩の量の和は一定であることを、(2) の漸化式を使って示せ。
 (4) x_n および y_n を、それぞれ、 a, b, n を用いて表せ。
 (5) 上記の操作を限りなく繰り返したとき、容器 A と容器 B の食塩水の濃度は、どのような値に近づくか、それぞれ求めよ。

解答

- (1) 求める量は $200 \times \frac{a}{100} + 300 \times \frac{b}{100} = 2a + 3b$ (g) である。
 (2) ここでは、量の単位「g」を省略する。また、題意の操作のうち、はじめの容器 A から容器 B への移動を操作 X、次の B から A への移動を Y とする。 $n-1$ 回の操作後、A には $2x_{n-1}$ 、B には $3y_{n-1}$ の食塩が入っている。題意の操作により、まず A から 100 の食塩水が B に移るが、そこに含まれる食塩は x_{n-1} であり、A に残っている食塩も x_{n-1} である。これにより、B では、400 の食塩水の中に食塩が $x_{n-1} + 3y_{n-1}$ 含まれることになる。次にこの状態の B から 100 の食塩水が A に移るが、そこに含まれる食塩は $\frac{1}{4}(x_{n-1} + 3y_{n-1})$ である。これにより、A では、200 の食塩水の中に食塩が $x_{n-1} + \frac{1}{4}(x_{n-1} + 3y_{n-1}) = \frac{5}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1}$ 含まれることになる。
 (B から A への移動の前後で B の濃度は変化しない)

以上から、各容器内の食塩水と食塩の量の変化を表にまとめると以下のようなになる。

	A 内の食塩水	A 内の食塩	B 内の食塩水	B 内の食塩
$n-1$ 回の操作後	200	$2x_{n-1}$	300	$3y_{n-1}$
X の操作後	100	x_{n-1}	400	$x_{n-1} + 3y_{n-1}$
Y の操作後	200	$\frac{5}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1}$	300	$\frac{3}{4}(x_{n-1} + 3y_{n-1})$

したがって

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\frac{5}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1}}{200} \times 100 \\ &= \frac{5}{8}x_{n-1} + \frac{3}{8}y_{n-1} \\ y_n &= \frac{\frac{3}{4}(x_{n-1} + 3y_{n-1})}{300} \times 100 \\ &= \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

- (3) 操作を n 回繰り返した後の食塩の量の和は $2x_n + 3y_n$ (g) であり、(2) の漸化式を用いれば

$$2x_n + 3y_n = 2 \left(\frac{5}{8}x_{n-1} + \frac{3}{8}y_{n-1} \right) + 3 \left(\frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1} \right)$$

$$= 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$$

となるので、 $\{2x_n + 3y_n\}$ は定数の列となる。したがって食塩の量の和は一定である ($2a + 3b$ となるがこれは当然の結果である)。

(4) $\{x_n + ky_n\}$ が等比数列となるような k を調べる。

$$\begin{aligned} x_n + ky_n &= \frac{5}{8}x_{n-1} + \frac{3}{8}y_{n-1} + k\left(\frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{3}{4}y_{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}k\right)x_{n-1} + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}k\right)y_{n-1} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。これより

$$1 : k = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}k\right) : \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{4}k\right) \iff k = -1, \frac{3}{2}$$

を得るので、これらの k の値のとき $x_n + ky_n$ は $x_{n-1} + ky_{n-1}$ の定数倍となり、 $\{x_n + ky_n\}$ は等比数列となる。このうち $k = -1$ を用いると、 $\textcircled{1}$ から

$$x_n - y_n = \frac{3}{8}(x_{n-1} - y_{n-1})$$

を得るので、 $x_0 = a, y_0 = b$ と考えれば

$$x_n - y_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n (a - b)$$

となる。これと、(3) から得られる

$$2x_n + 3y_n = 2a + 3b$$

を連立することにより、以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2a + 3b}{5} + \left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{3(a - b)}{5} \\ y_n &= \frac{2a + 3b}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{2(a - b)}{5} \end{aligned}$$

注釈

$k = \frac{3}{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すれば、(3)の結果である $2x_n + 3y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1}$ が得られる。

別解

(3) で得られた $2x_n + 3y_n = 2a + 3b$ から、 $y_{n-1} = \frac{-2x_{n-1} + 2a + 3b}{3}$ が得られる。これを(2)で得られた $x_n = \frac{5}{8}x_{n-1} + \frac{3}{8}y_{n-1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{5}{8}x_{n-1} + \frac{3}{8} \cdot \frac{-2x_{n-1} + 2a + 3b}{3} \\ &= \frac{3}{8}x_{n-1} + \frac{2a + 3b}{8} \end{aligned}$$

となるので、この漸化式を解いてもよい。(以下略)

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$ なので、(4)の結果から、容器 A と容器 B の食塩水の濃度はいずれも $\frac{2a + 3b}{5}$ (%) に近づく。

3 複素数平面において、原点 $O(0)$ と $A(\alpha)$, $B(\beta)$ は相異なる点であるとする。また、複素数 z と共役な複素数を \bar{z} で表すとき、以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

- (1) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるための条件を α と β および $\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ を用いて表せ。
- (2) 3 点 O, A, B が同一直線上にないとき、 $\triangle OAB$ の外心 C を表す複素数 γ を α と β および $\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ を用いて表せ。
- (3) $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3} + 3i$ であるとする。このとき、
 - (a) 半直線 CA から半直線 CB までの回転角 θ を求めよ。ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。
 - (b) さらに、 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_n = (\alpha - \gamma)\omega^n + \gamma$ とする。整数 n が動くとき、 z_n が β に最も近い n を求めよ。

解答

(1) O, A, B が同一直線上にあるとき、 $\frac{\beta - 0}{\alpha - 0} = \frac{\beta}{\alpha}$ が実数であるから、

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \iff \frac{\bar{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \iff \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta$$

が求める条件である。

(2) 点 C から 3 頂点までの距離が等しいので、

$$|\gamma| = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$$

が成り立つ。これより $|\gamma| = |\gamma - \alpha|$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 = |\gamma - \alpha|^2 &\iff \gamma\bar{\gamma} = (\gamma - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) \\ &\iff \gamma\bar{\gamma} = \gamma\bar{\gamma} - \alpha\bar{\gamma} - \gamma\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha} \\ &\iff -\alpha\bar{\gamma} - \gamma\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha} = 0 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、 $|\gamma| = |\gamma - \beta|$ の両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} |\gamma|^2 = |\gamma - \beta|^2 &\iff \gamma\bar{\gamma} = (\gamma - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) \\ &\iff \gamma\bar{\gamma} = \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\gamma} - \gamma\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} \\ &\iff -\beta\bar{\gamma} - \gamma\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} = 0 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① $\times \beta -$ ② $\times \alpha$ より

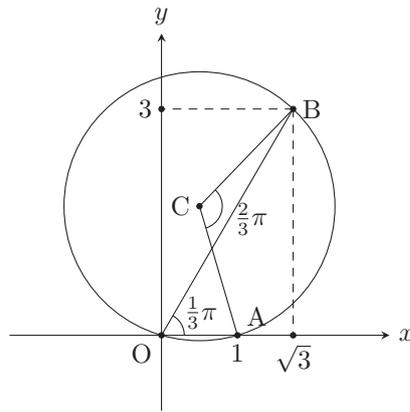
$$(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\gamma = \alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})$$

となる。ここで 3 点 O, A, B は同一直線上にないので、(1) から $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} \neq 0$ であるから、

$$\gamma = \frac{\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}$$

である。

- (3) (a) $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であるから、三角形 OAB の外接円を考えると円周角と中心角の関係から $\angle ACB = \frac{2}{3}\pi$,
すなわち半直線 CA から半直線 CB までの回転角は $\frac{2}{3}\pi$ である。



別解

(2) を用いて計算すると次のようになる.

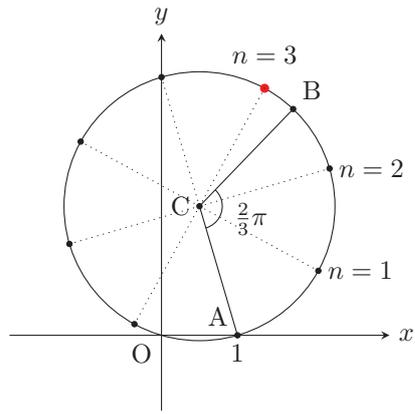
$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} \\
 &= \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + 3i) \cdot \{1 - (\sqrt{3} - 3i)\}}{1 \cdot (\sqrt{3} + 3i) - 1 \cdot (\sqrt{3} - 3i)} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} + 3i)(1 - \sqrt{3} + 3i)}{6i} \\
 &= \frac{(\sqrt{3} - 12) + 3i}{6i} \\
 &= \frac{(12 - \sqrt{3})i + 3}{6} \\
 &= \frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} &= \frac{(\sqrt{3} + 3i) - \left\{\frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\right\}}{1 - \left\{\frac{1}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)i\right\}} \\
 &= \frac{6\sqrt{3} - 3 + (6 + \sqrt{3})i}{3 - (12 - \sqrt{3})i} \\
 &= \frac{6\sqrt{3} - 3 + (6 + \sqrt{3})i}{3 - (12 - \sqrt{3})i} \times \frac{3 + (12 - \sqrt{3})i}{3 + (12 - \sqrt{3})i} \\
 &= \frac{-78 + 12\sqrt{3} + (-36 + 78\sqrt{3})i}{156 - 24\sqrt{3}} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\
 &= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

となるので, $\theta = \frac{2}{3}\pi$ である.

- (b) $\omega = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ であるから $\omega^n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}$ となる. したがって, $z_n - \gamma = (\alpha - \gamma)\omega^n$ より, z_n は点 A を点 C の周りに $\frac{n\pi}{4}$ 回転した点を表す複素数である. (a) より半直線 CA から半直線 CB までの回転角は $\frac{2}{3}\pi$ であるから, z_n が β に最も近くなるのは $n = 3 + 8k$ (k は整数) のときである.



講評

1 [小問集合] (1) 標準 (2) やや難 (3) やや易 (4) 標準 (5) 標準

- (1) 手順に紛れはないだろうが、場合分けの両方が解の公式を必要とするのですこし面倒。
 - (2) $b = 0$ のとき $\sin bx = 0$ になることを見落としてしまう人が多いと思われる。
 - (3) 典型的な場合の数の問題で落とせない。
 - (4) 変数を減らすと倍角公式が使える頻出問題になる。
 - (5) トレミーの定理に気づけば非常に楽に解けるが、座標計算や三角関数の計算に持ち込んでも解くことができる。
- (3)~(5) は典型的な問題で、なるべく取りこぼしなく乗り切りたい。(1),(2) をあわせて半答したいところ。

2 [数列] (標準)

2つの容器に入った食塩水の一部を入れ替えていく操作によって濃度がどう変化するかを、数列を使って考える問題。典型問題ではあるが、苦手としている受験生も一定数いるであろう題材である。また、初期値が a, b など文字で表されており計算がやや複雑となるため、慎重に処理したい。連立型の漸化式を誘導なしで解けるかどうかも重要なポイントであった。

3 [複素数平面] (やや難)

複素数平面での三角形の外心に関する問題であった。外心については3頂点からの距離が等しい、という条件式を立てて整理すれば外心を表す複素数を求めることは可能であるが、この種の問題に慣れていないとなかなか難しかったかもしれない。また、(3) では(2) を用いてもできるが計算が煩雑である。図形的に処理できたかどうかで差がつきそうである。

1(1)(2) と 2 でどれだけ立ち回れたかが合否を分けそうである。目標は 60%。

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ ☎0120-146-156 まで

<p>医学部進学予備校</p> <h1 style="font-size: 2em;">メビオ</h1> <p>☎0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/</p>	<p>医学部専門予備校</p>  <p>YMS</p> <p>医学部専門予備校</p> <p>英進館メビオ 福岡校</p>	<p>☎ 03-3370-0410</p> <p>https://yms.ne.jp/</p> <p>☎ 0120-192-215</p> <p>https://www.mebio-eishinkan.com/</p>	 <p>登録はこちらから</p>
---	--	---	---

<p>諦めない受験生をメビオは応援します!</p>	<h2 style="font-size: 2em;">私立医学部</h2>	<p>2025年 入試対策</p>
<h1 style="font-size: 3em;">医学部後期入試</h1> <h1 style="font-size: 3em;">ガイダンス</h1> <p>2/11 (火・祝)</p> <p>14:00~14:30 医学部進学予備校メビオ校舎</p>	<h1 style="font-size: 3em;">大学別後期模試</h1>	<p>2/13 近畿大学医学部</p> <p>2/19 金沢医科大学</p> <p>2/20 昭和大学医学部</p> <p>2/23 聖マリアンナ医科大学</p>
<p>参加無料</p> <p>詳細やお申込はこちらから</p> 		<p>詳細やお申込はこちらから</p> 