医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2024年2月3日実施

1

(1)　自然数 $m,\ n$ が $m^2-n^2=35$ を満たすとき，mn の取り得る値は $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする．

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ の展開式の定数項は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　$A,\ B$ を実数とする．関数 $f(x)=Ax^2+24x$ と $g(x)=24x^2+Bx$ が等式

$$f(x)=24x+x^2\int_0^1 g(t)dt, \qquad g(x)=24x^2+x\int_0^1 f(t)dt$$

を満たすとき，$A=\boxed{\text{エ}}$，$B=\boxed{\text{オ}}$ である．

(4)　$2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}\times 6^{-\frac{1}{6}}\times(1.5)^{-\frac{1}{3}}=\boxed{\text{カ}}$ である．

(5)　2 直線 $l:4x+3y-3=0$，$m:3x+4y-8=0$ の交点を P とし，l と y 軸の交点を Q とし，m と y 軸の交点を R とする．このとき，$\angle$QPR を 2 等分する直線の方程式は $7x+\boxed{\text{キ}}y-\boxed{\text{ク}}=0$ である．

(6)　$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\text{ケ}}$ である．

(7)　一般項が $a_k=(-1)^{k+1}k^2$ である数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．S_{2n} と S_{2n-1} を n の式で表すと，$S_{2n}=\boxed{\text{コ}}$ であり，$S_{2n-1}=\boxed{\text{サ}}$ である．

解答

ア．6　イ．306　ウ．84　エ．$\dfrac{84}{5}$　オ．$\dfrac{88}{5}$　カ．$\sqrt{2}$　キ．7　ク．11　ケ．$-\dfrac{208}{225}$

コ．$-2n^2-n$　サ．$2n^2-n$

解説

(1)　$(m+n)(m-n)=35$ であり，$m,\ n$ は自然数であるから，$m+n>m-n>0$ である．よって，

$$(m+n,\ m-n)=(35,\ 1),\ (7,\ 5) \iff (m,\ n)=(18,\ 17),\ (6,\ 1)$$

を得る．ゆえに，mn の取り得る値は **6，306** である．

(2)　$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ を展開したときの一般項は，${}_9\mathrm{C}_r x^{9-r}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r x^{9-3r}$　（r は $0\leqq r\leqq 9$ を満たす整数）と表せる．これが定数項を表すのは，$9-3r=0$ すなわち $r=3$ のときであるから，求める定数項は，

$${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{84}$$

(3)　題意より，$A=\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$，$B=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ であるから，

$$A=\int_0^1(24t^2+Bt)dt=\left[8t^3+\frac{1}{2}Bt^2\right]_0^1=8+\frac{1}{2}B\ \cdots ①$$

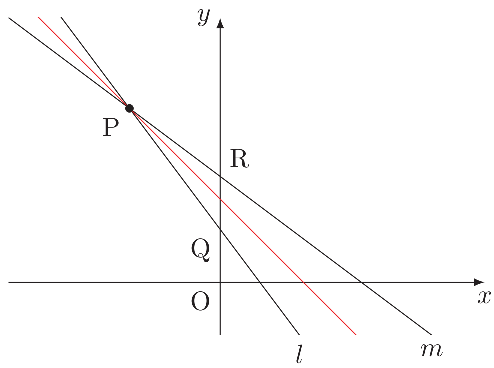
$$B=\int_0^1(At^2+24t)dt=\left[\frac{1}{3}At^3+12t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}A+12\ \cdots ②$$

①, ② より，$A=\boldsymbol{\frac{84}{5}}$，$B=\boldsymbol{\frac{88}{5}}$ である．

(4)　(与式) $=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^0=\boldsymbol{\sqrt{2}}.$

(5)　求める直線上の点を $(X,\ Y)$ とおくと，点 $(X,\ Y)$ と直線 l，直線 m との距離がそれぞれ等しいので，

$$\frac{|4X+3Y-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3X+4Y-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$\iff |4X+3Y-3|=|3X+4Y-8|$$



が成り立つ．これより，$4X+3Y-3=\pm(3X+4Y-8)$ を得る．

(i)　$4X+3Y-3=3X+4Y-8$ より，$X-Y+5=0$ である．

(ii)　$4X+3Y-3=-(3X+4Y-8)$ より，$7X+7Y-11=0$ である．

このとき，図より傾きが負の直線が求める角の 2 等分線であるから，$\boldsymbol{7x+7y-11=0}$ である．

(6)　与えられた 2 式の両辺を 2 乗して，

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\frac{1}{9}\quad より\quad \sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}\ \cdots ①$$
$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\frac{1}{25}\quad より\quad \cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{25}\ \cdots ②$$

① と ② の辺々を加えて，

$$1+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+1=\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\iff \cos(\alpha+\beta)=\boldsymbol{-\frac{208}{225}}$$

(7)　自然数 l に対して，$a_{2l-1}+a_{2l}=(-1)^{2l}(2l-1)^2+(-1)^{2l+1}(2l)^2=-4l+1$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\sum_{l=1}^{n}(a_{2l-1}+a_{2l})\\&=\sum_{l=1}^{n}(-4l+1)\\&=-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\&=\boldsymbol{-2n^2-n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{2n-1}&=S_{2n}-a_{2n}\\&=-2n^2-n-(-1)^{2n+1}(2n)^2\\&=\boldsymbol{2n^2-n}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B について，B から玉を 1 個取り出して A に入れ，次に A から玉を 1 個取り出して B に入れるという操作を考える．A に白玉が 2 個，B に黒玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に，B に入っている黒玉が 2 個である確率を P_n ，1 個である確率を Q_n ，0 個である確率を R_n と表す．以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ には実数が入る．

(1) $P_1 = \boxed{\text{ア}}$ ，$Q_1 = \boxed{\text{イ}}$ ，$R_1 = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $P_2 = \boxed{\text{エ}}$ ，$Q_2 = \boxed{\text{オ}}$ ，$R_2 = \boxed{\text{カ}}$ である．

(3) n 回目の操作の後で B に入っている黒玉の個数が 2 個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後も B に入っている黒玉の個数が 2 個である確率を P_n を用いて表すと $\boxed{\text{キ}}P_n$ である．

(4) n 回目の操作の後で B に入っている黒玉の個数が 1 個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後に B に入っている黒玉の個数が 2 個である確率を Q_n を用いて表すと $\boxed{\text{ク}}Q_n$ である．

(5) n 回目の操作の後で B に入っている黒玉の個数が 0 個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後に B に入っている黒玉の個数が 2 個である確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である．したがって，$P_{n+1} = \boxed{\text{キ}}P_n + \boxed{\text{ク}}Q_n$ である．

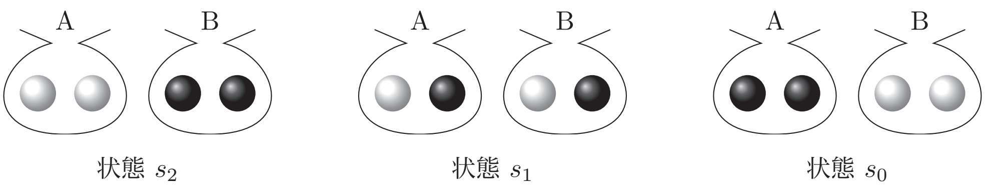
(6) $Q_{n+1} = \boxed{\text{コ}}$ である．

(7) $P_n = \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}} \cdot (\boxed{\text{ス}})^n$ である．

解答

ア．$\dfrac{1}{3}$ イ．$\dfrac{2}{3}$ ウ．0 エ．$\dfrac{2}{9}$ オ．$\dfrac{2}{3}$ カ．$\dfrac{1}{9}$ キ．$\dfrac{1}{3}$ ク．$\dfrac{1}{6}$ ケ．0 コ．$\dfrac{2}{3}$ サ．$\dfrac{1}{6}$
シ．$\dfrac{1}{2}$ ス．$\dfrac{1}{3}$

解説



上図のように，B に黒玉が k 個入っている状態を s_k とする．

- 現在の状態が s_2 の状態で操作を行ったとき，
  - 次の状態が s_2 のままとなる確率は，
    B から黒玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から黒玉 1 つを取り出して B に入れるので，
$$1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
  - 次の状態が s_1 に移る確率は，
    B から黒玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から白玉 1 つを取り出して B に入れるので，
$$1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
  - 次の状態が s_0 に移る確率は 0.
- 現在の状態が s_1 の状態で操作を行ったとき，
  - 次の状態が s_1 のままとなる確率は，
    B から黒玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から黒玉 1 つを取り出して B に入れるか，
    または，B から白玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から白玉 1 つを取り出して B に入れるので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

– 次の状態が s_0 に移る確率は，
B から白玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から黒玉 1 つを取り出して B に入れるので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

– 次の状態が s_2 に移る確率は，
B から黒玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から白玉 1 つを取り出して B に入れるので，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

- 現在の状態が s_0 の状態で操作を行ったとき，
  - 次の状態が s_0 のままとなる確率は，
    B から白玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から白玉 1 つを取り出して B に入れるので，

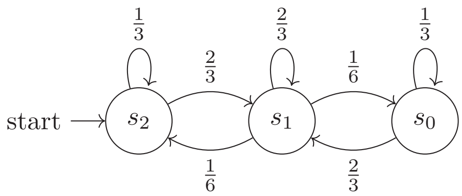
$$1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

  - 次の状態が s_1 に移る確率は，
    B から白玉 1 つを取り出して A に入れ，次に A から黒玉 1 つを取り出して B に入れるので，

$$1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

  - 次の状態が s_2 に移る確率は 0.

以上をまとめると，以下の状態遷移図となる.



(1) $P_1=\mathbf{\frac{1}{3}}$，$Q_1=\mathbf{\frac{2}{3}}$，$R_1=\mathbf{0}$.

(2) 操作 2 回で s_2 となるのは，$s_2\to s_2\to s_2$ または $s_2\to s_1\to s_2$ の場合なので，

$$P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

操作 2 回で s_1 となるのは，$s_2\to s_2\to s_1$ または $s_2\to s_1\to s_1$ の場合なので，

$$Q_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

操作 2 回で s_0 となるのは，$s_2\to s_1\to s_0$ の場合なので，

$$R_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

(3) 操作 n 回後に状態 s_2 になっている確率は P_n で，その後 $s_2\to s_2$ となる確率は $\frac{1}{3}$ なので，求める確率は $\mathbf{\frac{1}{3}}P_n$.

(4)　操作 n 回後に状態 s_1 になっている確率は Q_n で，その後 $s_1 \to s_2$ となる確率は $\dfrac{1}{6}$ なので，求める確率は $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}Q_n$.

(5)　$s_0 \to s_2$ となる確率は $\mathbf{0}$. したがって $P_{n+1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}P_n + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}Q_n$.

(6)　前問までと同様の考察をすると，$Q_{n+1} = \dfrac{2}{3}P_n + \dfrac{2}{3}Q_n + \dfrac{2}{3}R_n$ となるが，$P_n + Q_n + R_n = 1$ なので，$Q_{n+1} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ となる.

(7)　$Q_1 = \dfrac{2}{3}$ であること前問より，任意の自然数 n で $Q_n = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ である．よって，

$$\begin{aligned} & P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{9} \\ \iff & P_{n+1} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{6} &= \left(P_1 - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ \iff \qquad P_n &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{n} \end{aligned}$$

となる.

3 S_1 を半径 1 の球とする．自然数 n に対し，球 S_n に内接する立方体を P_n とし，P_n に内接する球を S_{n+1} とする．

(1) P_1 の一辺の長さは $\boxed{\quad\text{ア}\quad}$ である．

(2) S_2 の半径は $\boxed{\quad\text{イ}\quad}$ である．

(3) P_2 の一辺の長さは $\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$ である．

(4) P_n の体積は $\boxed{\quad\text{エ}\quad} \times 3^{\boxed{\text{オ}}\,n}$ である．

(5) S_n の体積は $\boxed{\quad\text{カ}\quad} \times 3^{\boxed{\text{キ}}\,n}$ である．

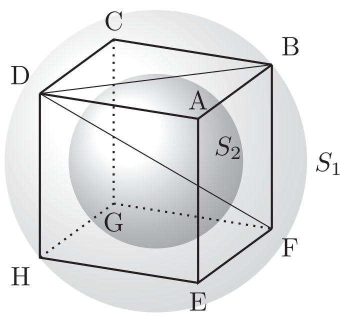
(6) S_n の体積が S_1 の体積の $\dfrac{1}{216}$ 倍以下となる最小の n の値は $\boxed{\quad\text{ク}\quad}$ である．

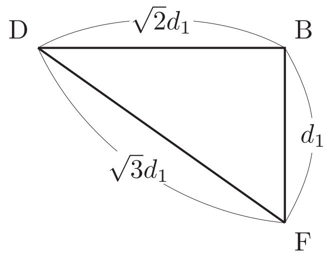
解答

ア．$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　イ．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　ウ．$\dfrac{2}{3}$　エ．8　オ．$-\dfrac{3}{2}$　カ．$4\sqrt{3}\pi$　キ．$-\dfrac{3}{2}$　ク．5

解説

P_n の一辺の長さを d_n, S_n の半径を r_n とする．題意から $r_1 = 1$ である．下図で，立方体は P_1 であり，球のうち大きい方が S_1，小さい方が S_2，また $\mathrm{BF} = d_1$ である．





(1) P_1 の最も長い対角線の長さ（図の DF）は $\sqrt{3}d_1$ であるが，これが S_1 の直径の長さに一致するので

$$\sqrt{3}d_1 = 2r_1 \iff d_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}r_1 = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

(2) S_2 は P_1 に内接するので S_2 の直径が P_1 の一辺の長さに等しい．したがって

$$2r_2 = d_1 \iff r_2 = \frac{1}{2}d_1 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(3) P_2 の最も長い対角線の長さは $\sqrt{3}d_2$ であるが，これが S_2 の直径の長さに一致するので

$$\sqrt{3}d_2 = 2r_2 \iff d_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}r_2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(4) 同様に考えると 2 以上の整数 n に対して $d_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}r_n$, $r_n = \dfrac{1}{2}d_{n-1}$ が成り立つとわかるので，

$d_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}d_{n-1}$ であり，$\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, 公比 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の等比数列である．

したがって $d_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$ であり，

$$P_n \text{ の体積} = {d_n}^3 = \mathbf{8} \times 3^{\boldsymbol{-\frac{3}{2}}n}$$

(5) $r_n = \dfrac{1}{2}d_{n-1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}$ だから

$$S_n \text{ の体積} = \frac{4\pi}{3}{r_n}^3 = \frac{4\pi}{3} \times 3^{-\frac{3}{2}(n-1)} = \frac{4\pi}{3} \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}n} = \boldsymbol{4\sqrt{3}\pi} \times 3^{\boldsymbol{-\frac{3}{2}}n}$$

(6) (5) からもわかるように S_n の体積は公比 $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ の等比数列である．したがって

$$\begin{aligned} & S_n \text{ の体積が } S_1 \text{ の体積の } \frac{1}{216} \text{ 倍以下} \\ \iff & \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{n-1} \leqq \frac{1}{216} \\ \iff & 3^{-\frac{3}{2}(n-1)} \leqq 6^{-3} \\ \iff & 3^{n-1} \geqq 36 \end{aligned}$$

となる．これを満たす最小の n の値は **5** である．

講評

1［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) やや易 (4) 易 (5) 標準 (6) 易 (7) 標準)
易しい問題が多い．(5)(7) の難易度がやや高いのと，(3)(6) の結果の数値があまりキレイでない辺りで差がつきそうだが，なんとか完答したいレベルである．

2［確率，数列］(標準)
典型的な確率漸化式の問題であった．状態遷移図がしっかり作れれば，あとは問題なく最後まで解き進められるだろう．

3［空間図形，数列］(標準)
交互に内接していく球と立方体の列についての問題であった．全く同じ問題を解いた経験がある受験生も少なくなさそうである．(1) が突破できればあとは慎重に作業するのみだが，(4)(5) では指定の解答枠に収まる形にする際に戸惑ったかもしれない．

本年の 1 日目と同様に，出題範囲に数学Ⅲが含まれていた年度よりも難易度がやや下がっている．作業量もさほど多くはない．どの問題も完答が望まれるレベルではあるが，所々計算が繁雑なところで差がつくだろう．
目標は 75%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ