解答速報

東海大学医学部　数学

2024年2月2日実施

1

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}(3x+2)^2dx-\int_0^{\frac{2}{3}}(3x-2)^2dx=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+h)^3-\frac{5}{2}(1+h)^2+\frac{16}{5}(1+h)-\frac{6}{5}}{h}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 3 直線 $x+2y=1$, $3x-4y=1$, $mx+ny=1$ が 1 点で交わるような，$1\leqq m+n\leqq 10$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ は $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある．

(4) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y=\sin\theta+\cos\theta$ の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(5) 1 つの箱に赤玉と青玉が合計 11 個入っている．この箱から 1 個の玉を取り出し，それを戻さずにまた 1 個の玉を取り出す．このとき，取り出された 2 個の玉がともに赤玉である確率は $\dfrac{28}{55}$ であるという．はじめにこの箱に入っていた赤玉の個数は $\boxed{\text{カ}}$ 個である．

(6) 4 点 O $(0,\ 0,\ 0)$，A $(1,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ 2,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ 3)$ を考える．C から直線 AB に下ろした垂線と AB の交点を H とし，$\angle\mathrm{OHC}=\theta$ とおく．このとき $\tan\theta=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

(7) 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}+3\vec{b}|=1$, $|\vec{a}-4\vec{b}|=1$ を満たすように動くとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\boxed{\text{ク}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{16}{3}$　イ．$-\dfrac{3}{10}$　ウ．5　エ．$\sqrt{2}$　オ．1　カ．8　キ．$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　ク．1　ケ．$\dfrac{3}{7}$

解説

(1) (与式) $\displaystyle=\int_0^{\frac{2}{3}}\{(3x+2)^2-(3x-2)^2\}dx=\int_0^{\frac{2}{3}}24xdx=\left[12x^2\right]_0^{\frac{2}{3}}=\mathbf{\frac{16}{3}}$ である．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{16}{5}x-\dfrac{6}{5}$ とおくと，$f(1)=0$ であるので，

$$(\text{与式})=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

と表される．$f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{16}{5}$ より，$f'(1)=\mathbf{-\dfrac{3}{10}}$ である．

別解

もちろん単純に計算して，

$$(\text{与式})=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}h^3-h^2-\frac{3}{10}h\right)=\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{2}h^2-h-\frac{3}{10}\right)=\mathbf{-\frac{3}{10}}$$

としてもよい．

(3)　$x+2y=1,\ 3x-4y=1$ を解くと，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ である．3 直線が 1 点で交わるには，$mx+ny=1$ が $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ を通ればよいので，

$$\frac{3}{5}m+\frac{1}{5}n=1 \iff 3m+n=5\cdots①$$

よって $n=5-3m$ となり，$m+n=m+(5-3m)=-2m+5$ である．ゆえに

$$1 \leqq m+n \leqq 10 \iff 1 \leqq -2m+5 \leqq 10 \iff -\frac{5}{2} \leqq m \leqq 2$$

これを満たす整数 m は $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ の 5 個であり，それぞれに対応する n も整数となるので，整数 $(m,\ n)$ の組も **5** 個となる．

別解

① 以下は次のように解くこともできる．

$(m,\ n)=(1,\ 2)$ は ① を満たす．これを ① に代入した式 $3\cdot 1+2=5$ と ① より，

$$3(m-1)+(n-2)=0 \iff 3(m-1)=-(n-2)\cdots②$$

が得られる．② の左辺は 3 の倍数であることより，$-(n-2)=3k$ （k は整数）と表されるので，これにより $n=-3k+2,\ m=k+1$ となる．

したがって $m+n=(k+1)+(-3k+2)=-2k+3$ となるので，

$$1 \leqq m+n \leqq 10 \iff 1 \leqq -2k+3 \leqq 10$$

これを解くと $-\dfrac{7}{2} \leqq k \leqq 1$ であり，これを満たす整数 k は $k=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$ の 5 個．

k の値が 1 つ決まれば $m,\ n$ の組も 1 つ定まるので，整数 $(m,\ n)$ の組も **5** 個となる．

(4)　三角関数の合成を用いると，$y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と表される．

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であり，この範囲で $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ となるので，

$$1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

よって y の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，最小値は **1** である．

(5)　赤玉の個数を n 個とすると，取り出された 2 個の玉がともに赤玉である確率は $\dfrac{n}{11}\cdot\dfrac{n-1}{10}$ と表されるので，

$$\frac{n}{11}\cdot\frac{n-1}{10}=\frac{28}{55} \iff n^2-n-56=0 \iff (n-8)(n+7)=0$$

$2 \leqq n \leqq 11$ より，$n=8$．よってはじめに箱に入っていた赤玉の個数は **8** 個である．

(6)　H は直線 AB 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-k,\ 2k,\ 0)$$

と表される．$\mathrm{CH} \perp \mathrm{AB}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

$$\iff (1-k,\ 2k,\ -3)\cdot(-1,\ 2,\ 0)=0$$

$$\iff -(1-k)+4k=0 \iff k=\frac{1}{5}$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5},\ 0\right)$ である．$\triangle\mathrm{COH}$ は $\angle\mathrm{COH}=90^\circ$ の直角三角形なので，

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OH}}=\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+0^2}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

(7)　$\vec{a}+3\vec{b}=\vec{x}\cdots①$，$\vec{a}-4\vec{b}=\vec{y}\cdots②$ とおくと，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ であり，

$$(①\times4+②\times3)\div7\quad\text{より}\quad\vec{a}=\frac{1}{7}(4\vec{x}+3\vec{y})$$

$$(①-②)\div7\quad\text{より}\quad\vec{b}=\frac{1}{7}(\vec{x}-\vec{y})$$

が得られる．これより，$\vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{7}(5\vec{x}+2\vec{y})$ となるので，

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{1}{49}\left(25|\vec{x}|^2+20\vec{x}\cdot\vec{y}+4|\vec{y}|^2\right)=\frac{1}{49}(29+20\vec{x}\cdot\vec{y})$$

ここで $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ とおくと，$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta=\cos\theta$ と表され，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ なので $-1\leqq\vec{x}\cdot\vec{y}\leqq1$．したがって

$$\frac{9}{49}\leqq\frac{1}{49}(29+20\vec{x}\cdot\vec{y})\leqq1\iff\frac{9}{49}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq1$$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ なので，$\dfrac{3}{7}\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq1$．よって最大値 $\mathbf{1}$，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$ である．

2 表1は，金融商品 A，B の各年の1月31日における1単位あたりの評価額を表している．

年	2022	2023	2024
金融商品 A （万円）	9	15	9
金融商品 B （万円）	21	9	6

表 1．金融商品 A, B の評価額のデータ

実数 x が $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすとする．表2は，A, B をそれぞれ $(1-x)$, x 単位だけ所有していた場合の各年の資産を表している．

年	2022	2023	2024
資産 （万円）	$9(1-x)+21x$	$15(1-x)+9x$	$9(1-x)+6x$

表 2．資産のデータ

表2のデータの平均値を $f(x)$, 分散を $g(x)$ とする．

(1) $f(0) =$ ア , $g(1) =$ イ である．

(2) 表1における A の評価額のデータと B の評価額のデータの相関係数は ウ である．

(3) $f(x)$ は $x =$ エ のとき最大値 オ をとる．

(4) $g(x)$ は $x =$ カ のとき最小値をとる．

(5) $a \geqq \dfrac{1}{10}$ に対して，関数 $h(x) = \{f(x)\}^2 - ag(x)$ を考える．$h(x)$ が $x = 1$ で最大値をとるための必要十分条件は $\dfrac{1}{10} \leqq a \leqq$ キ である．

解答

ア．11　イ．42　ウ．$-\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　エ．1　オ．12　カ．$\dfrac{7}{31}$　キ．$\dfrac{1}{4}$

解説

2022年，2023年，2024年の資産はそれぞれ $12x+9$, $-6x+15$, $-3x+9$ であるので，$f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x) = \frac{12x+9-6x+15-3x+9}{3} = x+11$$

$$g(x) = \frac{\{(11x-2)^2+(-7x+4)^2+(-4x-2)^2\}}{3} = 62x^2-28x+8$$

である．

(1) $f(0) = \mathbf{11}$, $g(1) = \mathbf{42}$ である．

(2) 金融商品 A のデータを p, B のデータを q とすると，

	2022	2023	2024	平均
p	9	15	9	11
$p-\overline{p}$	-2	4	-2	0
$(p-\overline{p})^2$	4	16	4	8
q	21	9	6	12
$q-\overline{q}$	9	-3	-6	0
$(q-\overline{q})^2$	81	9	36	42
$(p-\overline{p})(q-\overline{q})$	-18	-12	12	-6

この結果から，金融商品 A, B の共分散を s_{pq}, 標準偏差をそれぞれ s_p，s_q とすると，

$$s_{pq}=-6,\ s_p=\sqrt{8},\ s_q=\sqrt{42}\ \left(s_p=\sqrt{g(0)},\ s_q=\sqrt{g(1)}\text{を用いてもよい}\right)$$

であるので，相関係数 r は

$$r=\frac{s_{pq}}{s_p\cdot s_q}=\frac{-6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{42}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{14}}{21}}$$

である．

(3)　$f(x)$ は単調増加であるので，$0\leqq x\leqq 1$ においては $x=\mathbf{1}$ のときに最大値 $\mathbf{12}$ をとる．

(4)　$g(x)=62x^2-28x+8=62\left(x-\dfrac{7}{31}\right)^2+\dfrac{150}{31}$ であるので，

$0\leqq x\leqq 1$ においては $x=\boldsymbol{\dfrac{7}{31}}$ のときに最小値 $\dfrac{150}{31}$ をとる．

(5)

$$h(x)=(x+11)^2-a(62x^2-28x+8)=(1-62a)x^2+(22+28a)x+121-8a$$

であり，$a\geqq\dfrac{1}{10}$ であることから $1-62a<0$ が分かるのでこのグラフは上に凸な放物線であることが分かる．

軸は $x=\dfrac{14a+11}{62a-1}$ であることから，$x=1$ で最大値をとるための必要十分条件は

$$\text{軸}:x=\frac{14a+11}{62a-1}\geqq 1$$

が成り立てばよい．$62a-1>0$ であるので，$14a+11\geqq 62a-1\iff a\leqq\dfrac{1}{4}$.

したがって，$\dfrac{1}{10}\leqq a\leqq\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ である．

$\boxed{3}$ 初項から第 5 項までの和が 100 であり，初項から第 10 項までの和が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = 2^{a_1},\ \frac{b_n}{b_{n-1}} = 2^{a_n} \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表すと $a_n =$ $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を n の式で表すと $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $b_3 = 2^{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

(3) $b_n < 1$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) b_n は $n =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき，最大値をとる．その最大値の桁数は $\boxed{\text{カ}}$ であり，最高位に現れる数字は $\boxed{\text{キ}}$ である．

ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302,\ 0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ である．

$\boxed{\text{解答}}$

ア．$-7n + 41$　イ．$\dfrac{(-7n+75)n}{2}$　ウ．81　エ．11　オ．5　カ．31　キ．1

$\boxed{\text{解説}}$

(1) 公差を d とおくと，

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_1 + 4d)\cdot 5}{2} = 100 \\ \dfrac{(2a_1 + 9d)\cdot 10}{2} = 25 \end{cases}$$

となる．これを解くと，$a_1 = 34,\ d = -7$ となるので，

$$a_n = 34 + (n-1)\cdot(-7) = \boldsymbol{-7n + 41}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\{68 + (n-1)\cdot(-7)\}\cdot n}{2} = \boldsymbol{\frac{(-7n+75)n}{2}}$$

である．

(2) $a_2 = 27,\ a_3 = 20$ であり，

$$b_1 = 2^{a_1} = 2^{34}$$

$$b_2 = b_1 \cdot 2^{a_2} = 2^{34} \cdot 2^{27} = 2^{61}$$

$$b_3 = b_2 \cdot 2^{a_3} = 2^{61} \cdot 2^{20} = 2^{\boldsymbol{81}}$$

である．

(3) 漸化式

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = 2^{-7n+41}$$

の両辺に，底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 b_n - \log_2 b_{n-1} = -7n + 41$$

となるので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\log_2 b_n = 34 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{(-7n+75)n}{2}$$

である（$n=1$ のときも成立する）．

$$b_n < 1 \iff \log_2 b_n < 0 \iff n > \frac{75}{7}$$

より，これを満たす最小の n は **11** である．

(4)　$\log_2 b_n - \log_2 b_{n-1} > 0$ すなわち $-7n+41>0$ を解くと $n < \dfrac{41}{7}$ となるので，$n \leqq 5$ のとき $b_{n-1} < b_n$ であり，$n \geqq 6$ のとき $b_{n-1} > b_n$ である．すなわち，

$$b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 > b_6 > b_7 > \cdots\cdots$$

となるので，$n = \mathbf{5}$ のとき最大値となる．

$$\log_2 b_5 = \frac{(-35+75)\cdot 5}{2} = 100$$

より，$b_5 = 2^{100}$ である．$\log_{10} b_5 = 100\log_{10} 2$ であることから，

$$30 < 30.1 < \log_{10} b_5 < 30.2 < 30 + 0.301 < 30 + \log_{10} 2$$

となるので，$10^{30} < b_5 < 2\cdot 10^{30}$ となり，**31** 桁，最高位の数字は **1** である．

注釈

結局，

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\cdot\cdots\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}} &= 2^{a_2}\cdot 2^{a_3}\cdot 2^{a_4}\cdot\cdots\cdots 2^{a_n} \\ \iff \qquad b_n &= 2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} \end{aligned}$$

ということである．また，

$$b_n > b_{n-1} \iff \frac{b_n}{b_{n-1}} > 1 \iff a_n > 0$$

ということである．

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（(1) 易 (2) やや易 (3) 標準 (4) 易 (5) やや易 (6) 標準 (7) やや難）

(7) が難しいが，他は手堅く完答したいところである．

$\boxed{2}$［データの分析，2 次関数］（標準）

与えられたデータに対して，平均，分散，相関係数を求める問題であった．$f(x)$，$g(x)$ を具体的に定められれば，(3) 以降は 1 次関数，2 次関数についての処理となるが，係数などが繁雑で，計算が正しいか不安になった受験生も多いだろう．

$\boxed{3}$［数列，対数］（標準）

等差数列をテーマとしているが，それと指数関数を絡めているので少々解きにくかったかもしれない．落ち着いて処理したいところ．一般項 b_n が求まれば，(3) 以降は易しい．この問題で差がついたかもしれない．

昨年度から，出題範囲に数学Ⅲが含まれなくなり，それ以前の出題と比較すると問題の難易度がやや下がっている．小問集合で (7) 以外を完答に近いところまで仕上げた上で，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ でどれだけ処理しきれたか，という勝負になりそうである．目標は 70%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ