解答速報

近畿大学医学部（推薦）　数学

2023年11月19日実施

I

(1)　$2^m > 1000$ となる最小の自然数 m は $\boxed{アイ}$ であり，$2^n < 10000$ となる最大の自然数 n は $\boxed{ウエ}$ である。これらより，$\log_{10} 2$ の小数第一位の数字は $\boxed{オ}$ であり，$\log_{10} 5$ の小数第二位の数字は $\boxed{カ}$ である。

(2)　次のデータは，10 人の生徒に対し，数学の 10 点満点のテストを行った結果である。ただし，$a,\ b,\ c$ の値は 0 以上 10 以下の整数である。

$$2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 9,\ 5,\ 1,\ a,\ b,\ c \qquad (\text{単位は点})$$

3 つの値 $a,\ b,\ c$ の平均値が 6, 分散が $\dfrac{8}{3}$ であるとき，

$$a^2+b^2+c^2 = \boxed{キクケ}, \qquad ab+bc+ca = \boxed{コサシ}$$

である。このとき，10 人のデータの平均値は $\boxed{ス}$，分散は $\boxed{セ}$ である。

(3)　鋭角三角形 ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AD を下ろし，頂点 B から辺 CA に垂線 BE を下ろす。線分 AD と線分 BE の交点を F とする。$\mathrm{CA}=15$, $\mathrm{BC}=21$, $\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FA}} = \dfrac{2}{3}$ を満たすとき，$\mathrm{BD} = \boxed{ソタ}$, $\mathrm{CF} = \sqrt{\boxed{チツ}}$ となる。

解答

解答記号	正解
アイ	10
ウエ	13
オ	3
カ	9
キクケ	116
コサシ	104
ス	4
セ	8
ソタ	16
チツ	57

解説

(1) $2^9=512,\ 2^{10}=1024,\ 2^{11}=2048,\ 2^{12}=4096,\ 2^{13}=8192,\ 2^{14}=16384$ であるから，$m=\mathbf{10},\ n=\mathbf{13}$ であることがわかる．

$$2^{10}>1000 \iff 10\log_{10}2>3 \iff \log_{10}2>\frac{3}{10}=0.3$$
$$2^{13}<10000 \iff 13\log_{10}2<4 \iff \log_{10}2<\frac{4}{13}=0.307\cdots$$

より $\log_{10}2$ の小数第一位の数字は $\mathbf{3}$ である．また $\log_{10}5=1-\log_{10}2$ であるから $\log_{10}5<1-0.30=0.70$, $\log_{10}5>1-0.307\cdots=0.692\cdots$ より $\log_{10}5$ の小数第二位の数字は $\mathbf{9}$ である．

(2) $a,\ b,\ c$ の平均が 6 なので

$$\frac{a+b+c}{3}=6 \iff a+b+c=18$$

である．また，$a,\ b,\ c$ の分散が $\dfrac{8}{3}$ なので

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-6^2=\frac{8}{3} \iff a^2+b^2+c^2=\mathbf{116}$$

である．ここで「(分散) $=$ (2 乗の平均) $-$ (平均の 2 乗)」の公式を使った（もちろん使わなくても解ける）．

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}=\frac{18^2-116}{2}=\mathbf{104}$$

10 人のデータの平均は

$$\frac{2+2+0+3+9+5+1+a+b+c}{10}=\frac{22+18}{10}=\mathbf{4}$$

である．また分散は

$$\frac{2^2+2^2+0^2+3^2+9^2+5^2+1^2+a^2+b^2+c^2}{10}-4^2=\frac{124+116}{10}-16=\mathbf{8}$$

である．

(3) いろいろな解法が考えられる．

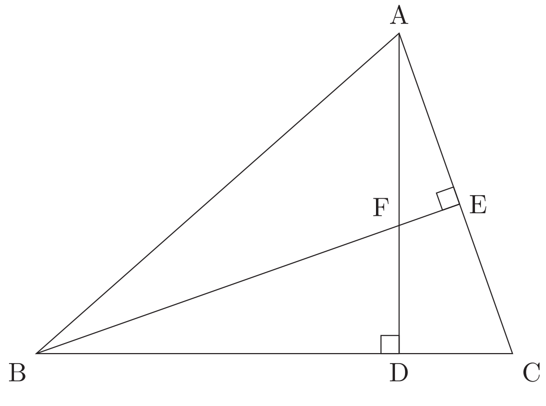
解法 1

(相似，メネラウスの定理の利用)

△ADC ∽ △BEC で相似比が $15:21=5:7$ であるから $\mathrm{CD}=5x,\ \mathrm{CE}=7x$ とおく．ただし $0<5x<21,\ 0<7x<15$ より $0<x<\dfrac{15}{7}$ である．

△ADC と直線 BE に関するメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FD}}\times\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\times\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$
$$\iff \frac{3}{2}\times\frac{21-5x}{21}\times\frac{7x}{15-7x}=1$$



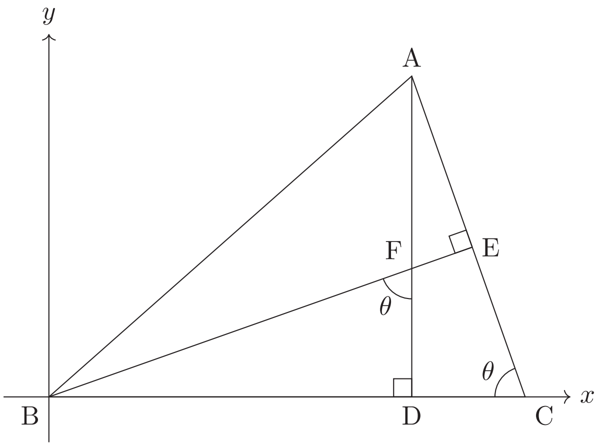
$0<x<\dfrac{15}{7}$ の範囲でこれを解くと $x=1$ が得られる．したがって，$\mathrm{BD}=21-5x=\mathbf{16}$ である．また，このとき三平方の定理より $\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{CD}^2}=\sqrt{15^2-5^2}=10\sqrt{2}$ であるから，$\mathrm{FD}=\dfrac{2}{5}\mathrm{AD}=4\sqrt{2}$ となる．したがって，再び三平方の定理により $\mathrm{CF}=\sqrt{\mathrm{CD}^2+\mathrm{FD}^2}=\boldsymbol{\sqrt{57}}$ である．

解法２

（座標平面で考える）

B$(0,\ 0)$, C$(21,\ 0)$ とする．$\angle \mathrm{BCA} = \theta$ とおくと，A$(21-15\cos\theta,\ 15\sin\theta)$, D$(21-15\cos\theta,\ 0)$, F$(21-15\cos\theta,\ 6\sin\theta)$ と表せ，BF$\perp$AC だから $21-15\cos\theta = 6\sin\theta\times\tan\theta$ でなければならない．整理すると $3\cos^2\theta - 7\cos\theta + 2 = 0$ となり，$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ がわかる．

代入しなおすと D$(16,\ 0)$, F$(16,\ 4\sqrt{2})$ だから，BD $=$ **16**, CF $= \sqrt{\mathbf{57}}$ を得る．



解法３

（相似，三平方の定理の利用）

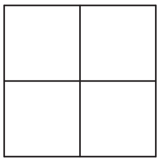
CD $= y$ $(0 < y < 15)$ とおくと三平方の定理より AD $= \sqrt{225-y^2}$，したがって FD $= \dfrac{2}{5}\sqrt{225-y^2}$.

$\triangle$BDF $\backsim$ $\triangle$ADC より BD : DF $=$ AD : DC だから

$$(21-y) : \frac{2}{5}\sqrt{225-y^2} = \sqrt{225-y^2} : y$$

これを解くと $y = 5$ が得られる（以下略）．

II 1 円，5 円，10 円，50 円，100 円，500 円の 6 種類のコインから 4 枚を選び，下の図のような 4 つの領域（左上，右上，左下，右下）に 1 枚ずつ置く。このとき，左上と右上の領域に置かれたコインの合計金額を a 円，左下と右下の領域に置かれたコインの合計金額を b 円，左上と左下の領域に置かれたコインの合計金額を c 円，右上と右下の領域に置かれたコインの合計金額を d 円とする。



(1) 6 種類のコインがそれぞれ 1 枚ずつある場合を考える。

(i) 置き方の総数は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである。

(ii) a と b がどちらも 10 の倍数となるとき，4 枚のコインの合計金額は常に $\boxed{\text{エオカ}}$ 円であり，そのような置き方の総数は $\boxed{\text{キク}}$ 通りである。

(iii) a と b がどちらも偶数となり，c と d がどちらも奇数となる置き方の総数は $\boxed{\text{ケコ}}$ 通りである。

(iv) a と b のどちらかが 500 より大きく，c と d のどちらかが 100 未満となる置き方の総数は $\boxed{\text{サシス}}$ 通りである。

(2) 6 種類のコインがそれぞれ 4 枚ずつある場合を考える。

(i) 置き方の総数は $\boxed{\text{セソタチ}}$ 通りである。

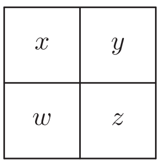
(ii) a が偶数，b が 5 の倍数，c が 10 の倍数，d が 100 の倍数となる置き方の総数は $\boxed{\text{ツテ}}$ 通りである。そのような置き方のうち，4 枚のコインの合計金額の最小値は $\boxed{\text{トナニ}}$ 円である。

解答

解答記号	正解
アイウ	360
エオカ	660
キク	24
ケコ	48
サシス	144
セソタチ	1296
ツテ	80
トナニ	120

解説

以下，図のように左上の領域から時計回りに順に x，y，z，w と名付ける．また，x に 50 円のコインを置くことを $x = 50$ と表記することとする．



(1) (i) 置き方の総数は ${}_6\mathrm{P}_4 = \mathbf{360}$ 通りある.

(ii) a と b がどちらも 10 の倍数となるのは, 10 円, 50 円, 100 円, 500 円 のコインを 1 枚ずつ使うときのみであるため, 合計金額は常に $10+50+100+500 = \mathbf{660}$ 円であり, 4 枚のコインの並べ方は $4! = \mathbf{24}$ 通りある.

(iii) a と b がどちらも偶数となり, c と d がどちらも奇数となる条件から, 1 円と 5 円が横並びに隣り合う形で 1 枚ずつ使われていることがわかる.

$(x,\ y) = (1,\ 5),\ (5,\ 1)$ のとき

$(w,\ z)$ に入るものは ${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 通りずつある.

$(w,\ z) = (1,\ 5),\ (5,\ 1)$ のときも同様であるため,

求める場合の数は $2 \cdot 12 \cdot 2 = \mathbf{48}$ 通り.

(iv) 条件より 500 円のコインを使うことは確定する.

$x = 500$ のときを考えると, $(y,\ z)$ は 100 円以外のコインを並べる ${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 通り, w はその他の 3 通りあるので, $12 \cdot 3 = 36$ 通りある.

$y,\ z,\ w = 500$ のときも同様であるので, 求める場合の数は, $36 \cdot 4 = \mathbf{144}$ 通り.

(2) (i) $x,\ y,\ z,\ w$ それぞれ 6 通りずつあるので, $6^4 = \mathbf{1296}$ 通り.

(ii) 条件より 1 円と 5 円のコインは使わないことが分かる.

$(y,\ z) = (50,\ 50),\ (100,\ 100),\ (100,\ 500),\ (500,\ 100),\ (500,\ 500)$ のいずれかである.

$x,\ w$ は 10 円, 50 円, 100 円, 500 円を自由に入れることができるので, $4^2 = 16$ 通り.

したがって求める場合の数は $5 \cdot 16 = \mathbf{80}$ 通り.

合計金額が最小となる組は $(x,\ y,\ z,\ w) = (10,\ 50,\ 50,\ 10)$ の合計 $\mathbf{120}$ 円である.

III 関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。ただし，a, b, c は実数であり，$a \neq 0$ である。座標平面において，放物線 $y=f(x)$ は点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$ を通る。放物線 $y=f(x)$ の頂点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とする。

(1) $c=\boxed{\text{ア}}$ であり，b は a を用いて表すと $b=\boxed{\text{イウ}}\,a+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる。

(2) $p=2$ のとき，$q=\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) 点 P が直線 OA 上にあるとする。a のとりうる値を小さい順に s, t とすると，

$$s=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。このとき，直線 OA と放物線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積は，$a=s$ のとき $\boxed{\text{シ}}$ であり，$a=t$ のとき $\boxed{\text{ス}}$ である。

(4) 点 P が直線 OA 上にないとき，△OAP の面積が 1 となる a の値は全部で $\boxed{\text{セ}}$ 個あり，それらの a の値のうち最大のものは

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
ア	0
イウ $a+\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$	$-2a+\dfrac{3}{2}$
カ	3
$\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{-3}{4}$
$\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}$	$\dfrac{3}{4}$
シ	1
ス	1
セ	4
$\dfrac{\text{ソ}+\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{2+\sqrt{13}}{4}$

解説

(1) $y=f(x)$ が O を通ることから $f(0)=c=\mathbf{0}$．また A を通ることから $f(2)=4a+2b+c=3$ であり，これと $c=0$ から $b=\mathbf{-2}a+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$．

(2)　(1) から，

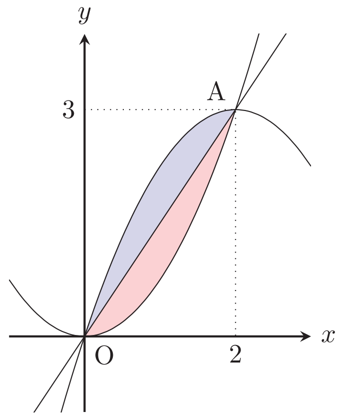
$$f(x) = ax^2 + \left(-2a + \frac{3}{2}\right)x$$
$$= a\left\{x - \left(1 - \frac{3}{4a}\right)\right\}^2 - a + \frac{3}{2} - \frac{9}{16a}$$

となるので，

$$p = 1 - \frac{3}{4a},\ q = -a + \frac{3}{2} - \frac{9}{16a} \cdots ①$$

である．したがって $p = 2$ のとき，$a = -\frac{3}{4}$ がわかるので，$q = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = \mathbf{3}$ である．

(3)　直線 OA の方程式は $y = \frac{3}{2}x$ なので，この上に P があるとき，① から



$$-a + \frac{3}{2} - \frac{9}{16a} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{4a}\right)$$
$$\iff a^2 = \frac{9}{16} \iff a = \pm\frac{3}{4}$$

を得る．したがって $s = \mathbf{\frac{-3}{4}}$，$t = \mathbf{\frac{3}{4}}$ である．いずれについても $|a| = \frac{3}{4}$ であり，また O, A の x 座標がそれぞれ 0，2 であることから，$a = s$，$a = t$ のいずれのときも題意の面積は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}(2-0)^3 = \mathbf{1}$$

である．

(4)　$\overrightarrow{OA} = (2,\ 3)$，$\overrightarrow{OP} = (p,\ q)$ なので，△OAP の面積が 1 であることから

$$\frac{1}{2}|2q - 3p| = 1 \iff 2q - 3p = \pm 2$$

を得る．これに ① を代入して

$$2\left(-a + \frac{3}{2} - \frac{9}{16a}\right) - 3\left(1 - \frac{3}{4a}\right) = \pm 2$$
$$\iff -2a + \frac{9}{8a} = \pm 2$$
$$\iff 16a^2 \pm 16a - 9 = 0$$
$$\iff a = \frac{\pm 2 \pm \sqrt{13}}{4}\ (\text{複号任意})$$

となる．したがって a の値は全部で **4** 個あり，そのうち最大のものは $a = \mathbf{\frac{2 + \sqrt{13}}{4}}$ である．

講評

Ⅰ［小問集合］（やや易～やや難）

(1) の常用対数の問題は典型問題であり落とせない．値を覚えていた受験生は少し得をしたかもしれない．(2) もデータの分析の典型題であるためこちらも同様に落とせない．(3) の図形問題はやや難しかった．相似の性質の利用やメネラウスの定理など使える武器を駆使して挑みたかった．

Ⅱ［場合の数］（標準）

4 つのマスに 6 種類のコインを並べる場合の数の問題であった．組合せでなく並べ方を考慮する順列であることに気をつけ，与えられた条件から使うコインと使わないコインをしっかり見極める必要があった．題意を掴むことができれば最後までたどり着くことも可能であったと思われるので粘り強くやり遂げたい．

Ⅲ［数学Ⅱの微積分］（標準）

オーソドックスな 2 次関数の出題であった．頂点がやや複雑なので正確に処理する計算力は求められる．頻出である $\dfrac{1}{6}$ 公式や，$S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ などといった三角形の面積公式をいかに使いこなして手際よく解けるかでも差がつきそうであった．

今年度も引き続き他学部と共通のマークシート形式であった．出題テーマは引き続き典型的な問題の割合が多いが各大問で少し方針で悩む問題も入っており，作業速度や切り替えの判断で差がつきそうなセットではあった．大問Ⅰ(1)(2)，Ⅱを完答に近いところまで仕上げ，大問Ⅱや大問Ⅲでどれくらい効率よく立ち回れたかの勝負だろう．目標は 70%.