医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

近畿大学医学部（前期）　数学

2024年1月28日実施

I　座標平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く点 P と，点 A$(4\sqrt{3},\ 4)$ を中心とする半径 5 の円周上を動く点 Q がある。

(1)　OA $=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，直線 OA と x 軸のなす角 α は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　P，Q の y 座標をそれぞれ p，q とする。$q-p$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{エオ}} \leqq q-p \leqq \boxed{\text{カキ}}$$

である。

(3)　線分 PQ の長さのとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ク}} \leqq \mathrm{PQ} \leqq \boxed{\text{ケコ}}$$

である。

(4)　線分 PQ が通りうる領域を D とする。D の面積は

$$\boxed{\text{サシ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\boxed{\text{セソ}}\pi$$

である。

(5)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角を β とする。ただし，$0\leqq\beta\leqq\pi$ とする。$\tan\beta$ のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{タ}} \leqq \tan\beta \leqq \frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(6)　直線 PQ の傾きを m とする。m の最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
ア	8
$\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$	$\dfrac{1}{6}\pi$
エオ $\leqq q-p \leqq$ カキ	$-2 \leqq q-p \leqq 10$
ク $\leqq \mathrm{PQ} \leqq$ ケコ	$2 \leqq \mathrm{PQ} \leqq 14$
サシ$\sqrt{\text{ス}}$ + セソπ	$24\sqrt{3}+17\pi$
タ $\leqq \tan\beta \leqq \dfrac{\text{チ}\sqrt{\text{ツ}}}{\text{テ}}$	$0 \leqq \tan\beta \leqq \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$
$\dfrac{\text{ト}\sqrt{\text{ナ}}}{\text{ニ}}+\sqrt{\text{ヌ}}$	$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}$

解説

(1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=\mathbf{8}$ である．また，直線 OA の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，直線 OA と x 軸のなす角 α は $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\pi$ である．

(2)　$-1 \leqq p \leqq 1$ すなわち $-1 \leqq -p \leqq 1$ であり，$-1 \leqq q \leqq 9$ であるから，$q-p$ のとりうる値の範囲は，

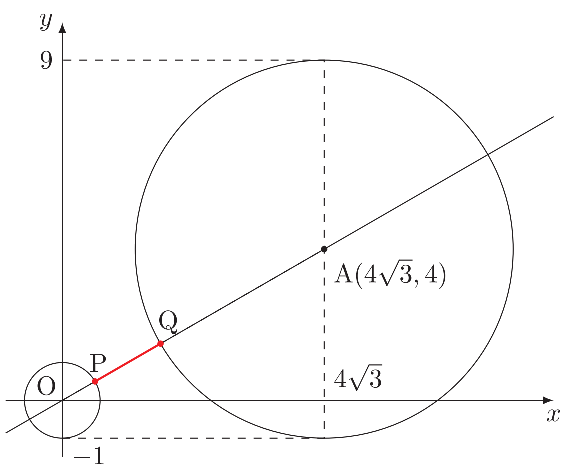
$$\mathbf{-2} \leqq q-p \leqq \mathbf{10}$$

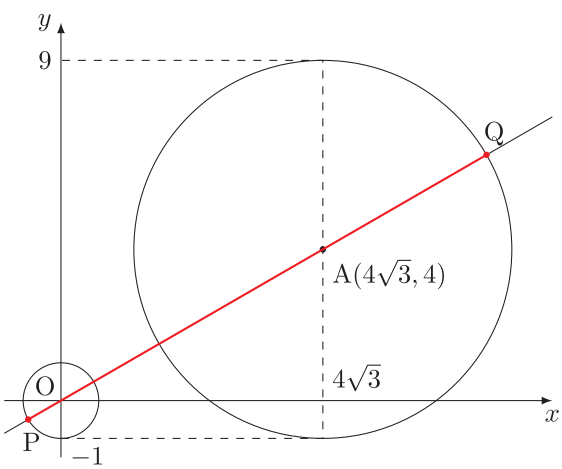
である．

(3)　線分 PQ の長さが最小となるのは下左図のようになるときであり，このとき $\mathrm{PQ}=8-(1+5)=2$ である．また，線分 PQ の長さが最大となるのは下右図のようになるときであり，このとき $\mathrm{PQ}=8+(1+5)=14$ である．したがって，

$$\mathbf{2} \leqq \mathrm{PQ} \leqq \mathbf{14}$$

である．

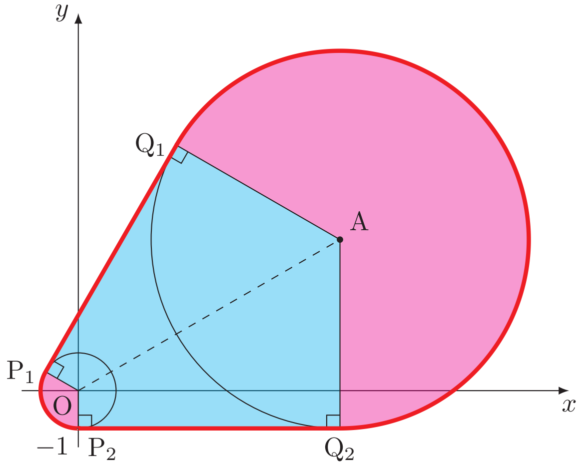




(4)　D は下図の色つき部分である．この面積は

$$\begin{aligned}&(\text{台形 OAQ}_1\text{P}_1)+(\text{台形 OAQ}_2\text{P}_2)+(\text{中心角が}\frac{2}{3}\pi\text{の扇形 OP}_1\text{P}_2)+(\text{中心角が}\frac{4}{3}\pi\text{の扇形 AQ}_1\text{Q}_2)\\&=2\times\frac{1}{2}(1+5)\times4\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times5^2\times\frac{4}{3}\pi\\&=\mathbf{24\sqrt{3}+17\pi}\end{aligned}$$

である．



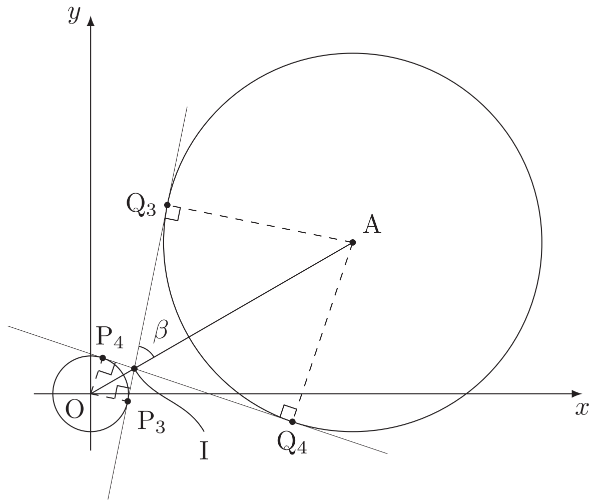
(5)　β が $\dfrac{\pi}{2}$ 以上とならないことは明らかであるから， $0\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．このとき $\tan\beta$ は β に関して単調増加である．β が最小となるのは $\overrightarrow{\text{OA}}$ と $\overrightarrow{\text{PQ}}$ が平行となるとき，すなわち $\beta=0$ のときであり，このとき $\tan\beta=0$ である．β が最大となるのは下図のように直線 PQ が 2 円に（直線 PQ に関して 2 円が反対側の位置にあるように）接するときである．このとき，この 2 接線の交点を I とすると，点 I は線分 OA を 2 円の半径の比 $1:5$ に内分する点であるから，$\text{IA}=\dfrac{5}{6}\text{OA}=\dfrac{20}{3}$ がわかる．したがって，半径 5 の円と 2 接線との接点を図のように Q_3，Q_4 とすると，

$$\sin\beta=\frac{\text{AQ}_3}{\text{IA}}=\frac{5}{\frac{20}{3}}=\frac{3}{4}$$

より

$$\tan\beta=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

であるから，$\mathbf{0\leqq\tan\beta\leqq\dfrac{3\sqrt{7}}{7}}$ である．



(6)　上図の接線 P_3Q_3 が傾き m が最も大きくなるときである．このとき

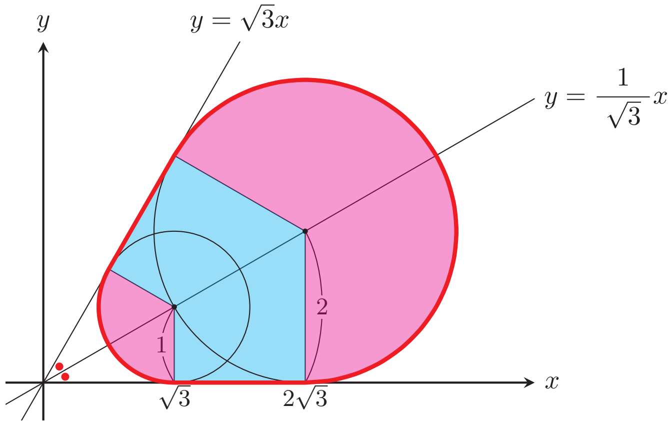
$$
\begin{aligned}
m &= \tan(\alpha+\beta) \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{3\sqrt{7}}{7}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{7}} \\
&= \frac{7\sqrt{3}+9\sqrt{7}}{21-3\sqrt{21}} \\
&= \frac{\sqrt{21}(\sqrt{7}+3\sqrt{3})}{\sqrt{21}(\sqrt{21}-3)} \\
&= \frac{(\sqrt{7}+3\sqrt{3})(\sqrt{21}+3)}{12} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}+\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

である．

的中!!

2023 年 12 月実施 医学部大学別模試

k が $1 \leqq k \leqq 2$ の範囲を変化するとき，不等式 $x^2+y^2-2\sqrt{3}kx-2ky+k^2 \leqq 0$ の表す領域が移動してできる図形の面積は $\boxed{\ (6)\ }$ である．



2 つの扇形 と 2 つの台形 に分けて面積を求める

II　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_n = [\sqrt{n}] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1)　$a_{10} =$ $\boxed{\text{ア}}$，$a_{100} =$ $\boxed{\text{イウ}}$，$a_{2024} =$ $\boxed{\text{エオ}}$ である。

(2)　自然数 n に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

(i)　$S_{10} =$ $\boxed{\text{カキ}}$，$S_{100} =$ $\boxed{\text{クケコ}}$ である。

(ii)　S_{2024} の最大の素因数は $\boxed{\text{サシス}}$ である。

(iii)　$S_n > 2024$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\text{セソタ}}$ である。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を次の規則 1，規則 2 で定める。

規則 1 ：$\dfrac{n}{a_n} = \left[\dfrac{n}{a_n}\right]$ となる自然数 n に対して，$b_n = \dfrac{n}{a_n}$ とおく。

規則 2 ：$\dfrac{n}{a_n} \neq \left[\dfrac{n}{a_n}\right]$ となる自然数 n に対して，$b_n = 0$ とおく。

(i)　$b_{10} =$ $\boxed{\text{チ}}$，$b_{100} =$ $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

(ii)　$1 \leqq n \leqq 100$ において，$b_n > 0$ を満たす自然数 n の個数は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

(iii)　$\sum_{k=1}^{100} b_k =$ $\boxed{\text{ニヌネ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	3
イウ	10
エオ	44
カキ	19
クケコ	625
サシス	181
セソタ	217
チ	0
ツテ	10
トナ	28
ニヌネ	172

解説

(1)　$3<\sqrt{10}<4$ より，$a_{10}=\mathbf{3}$．$\sqrt{100}=10$ より，$a_{100}=\mathbf{10}$．また，$44=\sqrt{1936}<\sqrt{2024}<\sqrt{2025}=45$ より，$a_{2024}=\mathbf{44}$ である．（これにより $a_{2025}=45$ もわかる）

(2)　(i)　$[\sqrt{n}\,]=k$（ただし k は自然数）となる n の範囲を考えると，$k\leqq\sqrt{n}<k+1$ より，$k^2\leqq n<(k+1)^2$ となる．$k,\ n$ は自然数であるので，$a_n=k$ となる n は $k^2\leqq n\leqq k^2+2k$ を満たす $2k+1$ 個である．したがって，$a_n=k$ となる項の総和は $k(2k+1)$ なので，$a_1=1$ から $a_n=N$ となる最後の項までの総和を $T(N)$ とすると

$$\begin{aligned}T(N)&=\sum_{k=1}^{N}k(2k+1)\\&=\sum_{k=1}^{N}(2k^2+k)\\&=2\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)+\frac{1}{2}N(N+1)\\&=\frac{1}{6}N(N+1)(4N+5)\end{aligned}$$

となる．

- S_{10} について
  $1\leqq n\leqq 10$ のとき，$a_n=3$ となる n は $n=9,\ 10$ なので，

$$S_{10}=T(2)+3\cdot 2=\mathbf{19}$$

- S_{100} について
  $1\leqq n\leqq 100$ のとき，$a_n=10$ となる n は $n=100$ のみなので，

$$S_{100}=T(9)+10=\mathbf{625}$$

(ii)　(1) の結果から，$a_n=44$ である最後の項が a_{2024} であるとわかるので，

$$\begin{aligned}S_{2024}=T(44)&=\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 181\\&=2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 181\end{aligned}$$

よって，S_{2024} の最大の素因数は $\mathbf{181}$ である．

(iii)　$T(13)=1729,\ T(14)=2135$ であるから，$S_n>2024$ を満たす最小の n において $a_n=14$ であるとわかる．a_1 から数えて $a_n=13$ を満たす最後の項までの項数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{13}(2k+1)=195$ であり，

$$2024-1729=295=14\times 21+1$$

を利用すると

$$S_{195+21}=S_{216}=1729+14\times 21=2023<2024,\quad S_{217}=2023+14=2037>2024$$

がわかるので，$S_n>2024$ を満たす最小の n は $\mathbf{217}$ である．

(3)　(i)　$\dfrac{10}{a_{10}}=\dfrac{10}{3}\fallingdotseq\left[\dfrac{10}{3}\right]=3$ より，$b_{10}=\mathbf{0}$ であり，$\dfrac{100}{a_{100}}=10=\left[\dfrac{100}{10}\right]$ より，$b_{100}=\mathbf{10}$ である．

(ii)　(2)(i) の議論から，$a_n=k$ を満たす n の範囲は $k^2\leqq n\leqq k^2+2k$ であるから，

$$k^2\leqq n\leqq k^2+2k \iff k\leqq \frac{n}{k}\leqq k+2 \iff k\leqq \frac{n}{a_n}\leqq k+2$$

であり，この範囲において $b_n>0$ を満たす b_n の値は $k,\ k+1,\ k+2$ の 3 つ存在する（それ以外はすべて 0 である）．$1\leqq n\leqq 100$ において $a_n=10$ となるのは $n=100$ のときのみであり $b_{100}=10>0$ であるから，$b_n>0$ を満たす自然数 n の個数は $3\times 9+1=\mathbf{28}$ 個である．

(iii)　(ii) より，

$$\sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{\ell=1}^{9}\{\ell+(\ell+1)+(\ell+2)\}+10=\mathbf{172}$$

III

(1)　$\log_{16} 1024 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　方程式 $\log_{16} x = -\dfrac{1}{4}$ の解は $x = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3)　関数

$$f(x) = (\log_{16} x)^2 - \log_{16} x^4 - 3$$

の最小値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。また，$f(x)$ が最小となる x の値は $x = \boxed{\text{キクケ}}$ である。

(4)　不等式

$$1 + 2\log_{16}(9-x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_{10} 4} + \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

を満たす実数 x のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{コサ}} < x < \boxed{\text{シス}},\quad \boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$$

である。

(5)　$x > 1$ とする。関数

$$g(x) = \log_{16} x + 10\log_x 1024 + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{x}$$

の最小値は $\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。また，$g(x)$ が最小となる x の値の整数部分を N とする。N の桁（けた）数は $\boxed{\text{ツ}}$ であり，N の最高位の数字は $\boxed{\text{テ}}$ である。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{5}{2}$
$\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\dfrac{1}{2}$
オカ	-7
キクケ	256
コサ $< x <$ シス	$-2 < x < -1$
セ $< x <$ ソ	$8 < x < 9$
タ$\sqrt{\text{チ}}$	$5\sqrt{2}$
ツ	9
テ	3

解説

(1)

$$\log_{16} 1024 = \frac{\log_2 1024}{\log_2 16} = \frac{10}{4} = \mathbf{\frac{5}{2}}$$

(2)

$$\log_{16} x = -\frac{1}{4} \iff x = 16^{-\frac{1}{4}} = (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_{16} x)^2 - 4\log_{16} x - 3 \\ &= (\log_{16} x - 2)^2 - 7 \end{aligned}$$

であり，$\log_{16} x$ はすべての実数値をとるので，$\log_{16} x = 2 \iff x = \mathbf{256}$ のときに最小値 $\mathbf{-7}$ をとる．

(4)　真数条件より $-2 < x < 9 \cdots$ ① が得られる．

この条件下で与えられた不等式の底をすべて 2 に変換すると，

$$\begin{aligned} &1 + 2\cdot\frac{\log_2(9-x)}{4} < \frac{1}{2} + \frac{\log_2 10}{2} + \frac{\log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{-2} \\ \iff &2 + \log_2(9-x) < 1 + \log_2 10 - \log_2\left(\frac{1}{2}x+1\right) \\ \iff &\log_2(9-x)\left(\frac{1}{2}x+1\right) < \log_2 5 \\ \iff &(9-x)\left(\frac{1}{2}x+1\right) < 5 \\ \iff &x^2 - 7x - 8 > 0 \\ \iff &x < -1,\ 8 < x \cdots ② \end{aligned}$$

であるので，①, ② から求める x の値の範囲は $\mathbf{-2} < x < \mathbf{-1},\ \mathbf{8} < x < \mathbf{9}$ である．

(5)　与えられた関数の底をすべて 2 に変換すると，

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\log_2 x}{4} + 10\cdot\frac{10}{\log_2 x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{-2} \\ &= \frac{\log_2 x}{8} + \frac{100}{\log_2 x} \end{aligned}$$

であり，$x > 1$ より $\log_2 x > 0$ であることから相加平均・相乗平均の関係式を用いて

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\log_2 x}{8} + \frac{100}{\log_2 x} \\ &\geqq 2\sqrt{\frac{\log_2 x}{8}\cdot\frac{100}{\log_2 x}} \\ &= 2\sqrt{\frac{100}{8}} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

等号成立は $\dfrac{\log_2 x}{8} = \dfrac{100}{\log_2 x} \iff \log_2 x = 20\sqrt{2}$ のときである．

したがって，$x = 2^{20\sqrt{2}}$ のときに最小値 $\mathbf{5\sqrt{2}}$ をとる．

また，$1.41^2 < 2 < 1.42^2$ であることから $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を得る．ここで，

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{20\sqrt{2}} &= 20\sqrt{2}\log_{10} 2\\ &> 20\cdot 1.41\cdot 0.3010\\ &= 8.4882\\ &> 8+\log_{10} 3\\ \log_{10} 2^{20\sqrt{2}} &= 20\sqrt{2}\log_{10} 2\\ &< 20\cdot 1.42\cdot 0.3010\\ &= 8.5484\\ &< 8+\log_{10} 4\end{aligned}$$

であることから，

$$8+\log_{10} 3 < \log_{10} 2^{20\sqrt{2}} < 8+\log_{10} 4 \iff 3\cdot 10^8 < 2^{20\sqrt{2}} < 4\cdot 10^8$$

を得る．したがって，$2^{20\sqrt{2}}$ の整数部分 N の桁数は **9** 桁であり，最高位の数字は **3** である．

的中!!

1/25 近畿大学医学部直前授業のテキスト（入試日の 3 日前！）

正の数 x，y は $(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 6\log_2 x - 8\log_2 y$ を満たして動くものとする．
このとき，次の問い ((1) 〜 (4)) に答えよ．

(1) $x=1$ のとき，$y = \boxed{\text{ア}}$ または $y = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$ である．

(2) x のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leqq x \leqq \boxed{\text{クケコ}}$$

y のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シスセ}}} \leqq y \leqq \boxed{\text{ソ}}$$

である．

(3) $\dfrac{x^4}{y^3}$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$y = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとる．

(4) $\dfrac{x^4}{y^3}$ の最大値は $\boxed{\text{ニヌ}}$ 桁の整数で，最高位の数字は $\boxed{\text{ネ}}$ ，一の位の数字は $\boxed{\text{ノ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

解説動画公開中!！
https://youtu.be/dg0ezhuB4qM

講評

Ⅰ［図形と方程式，三角関数］（標準）

座標平面上の 2 つの円周上にある 2 点を結んだ線分・直線について考える問題であった．どれも典型的な出題であり，日頃の演習の成果が出やすいと言える．ここは完答を目指したい．

Ⅱ［数列］（標準〜やや難）

ガウス記号を含む一般項により，各群の項が同じ値からなる群数列についての問題であった．よくあるタイプの問題ではあるが，同種の問題の経験の有無で差が出そうである．$S_n > 2024$ を満たす最小の n を求める問題は面倒だが，そこが解けなくてもその後の問題は関係なく解けるので後半も粘り強く考えたい．

Ⅲ［対数］（やや易〜標準）

最小値，不等式，桁数，といった対数についての典型的な処理をしていく問題であった．底の変換を丁寧に行って，完答を目指したい．

今年度から，前期試験は他学部と共通のマークシート形式となった．大問Ⅱがやや面倒だが，全体的に典型的な問題が多く，日頃の勉強量が反映されそうなセットであった．

大問Ⅰ，Ⅲを完答に近いところまで仕上げ，大問Ⅱでどれだけ立ち回れたかの勝負だろう．一次合格の目標は 75%.

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ