解答速報

川崎医科大学　数学

2024年1月21日実施

1　O を原点とする座標平面上に 2 点 $A(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$B(2-\sqrt{3},\ 1)$ がある。

(1)　線分 OA の長さは $\boxed{ア}$ であり，直線 OA と x 軸のなす角を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\alpha=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。また，直線 OB の方程式は $y=\left(\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オ}}\right)x$ であり，2 直線 OA，OB のなす角を β $\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\beta=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi$ である。

(2)　点 A を中心として点 O を通る円を K とし，2 直線 OA，OB と円 K の交点で第 1 象限にあるものをそれぞれ C，D とする。線分 OC，OD および短い方の弧 CD で囲まれる領域を S とする。

(i)　領域 S の面積は $\sqrt{\boxed{ク}}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ であり，点 D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}-\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}},\ \frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}+\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}\right)$$

である。

(ii)　円 K 上の点 C における接線の方程式は $y=\boxed{ソ}x+\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}$ である。また，点 $P(x,\ y)$ が領域 S を動くとき，$x+2y$ の最大値は $\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}+\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}$ である。ただし，$\boxed{テ}<\boxed{ナ}$ とする。

(iii)　線分 AC，AD および短い方の弧 CD で囲まれた扇形 ACD を，直線 OD の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\pi^{\boxed{ネ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	2
$\dfrac{イ}{ウ}\pi$	$\dfrac{1}{4}\pi$
エ $+\sqrt{オ}$	$2+\sqrt{3}$
$\dfrac{カ}{キ}\pi$	$\dfrac{1}{6}\pi$
$\sqrt{ク}+\dfrac{ケ}{コ}\pi$	$\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi$

解答記号	正解
$\dfrac{サ\sqrt{シ}-\sqrt{ス}}{セ}$	$\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$
ソ $x+$ タ $\sqrt{チ}$	$-x+4\sqrt{2}$
ツ $\sqrt{テ}+$ ト $\sqrt{ナ}$	$3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$
$\dfrac{ニ}{ヌ}\pi^{ネ}$	$\dfrac{4}{3}\pi^2$

解説

(1) $\mathrm{OA}=\sqrt{2+2}=\mathbf{2}$ であり，直線 OA の傾きは 1 であるので，$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\pi}$ である．直線 OB の方程式は

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}x \iff \boldsymbol{y=(2+\sqrt{3})x}$ であるので，$\tan(\alpha+\beta)=2+\sqrt{3}$ である．

したがって，$\tan\beta=\tan\{(\alpha+\beta)-\alpha\}=\dfrac{(2+\sqrt{3})-1}{1+(2+\sqrt{3})\cdot 1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得るので，$\beta=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\pi}$ である．

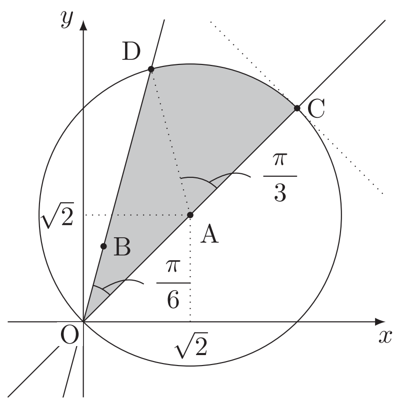
別解

$\tan\dfrac{5}{12}\pi=2+\sqrt{3}$ を知っていれば，$\beta=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{1}{4}\pi=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\pi}$ とすぐに求めることができる．

(2) (i) 円 K の方程式は $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4$ である．

中心角と円周角の関係から $\angle\mathrm{CAD}=2\angle\mathrm{COD}=\dfrac{1}{3}\pi$ が得られる．

領域 S の面積は三角形 OAD と扇形 ACD の面積の和であるので，



$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{1}{3}\pi=\boldsymbol{\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi}$$

$\mathrm{OB}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ であり，

$\mathrm{OD}=2\mathrm{OA}\cos\dfrac{1}{6}\pi=2\sqrt{3}$ であることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}(2-\sqrt{3},\ 1)=\left(\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}},\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ であり，点 C における接線は直線 OA に垂直であることから，

$$y=-(x-2\sqrt{2})+2\sqrt{2} \iff \boldsymbol{y=-x+4\sqrt{2}}$$

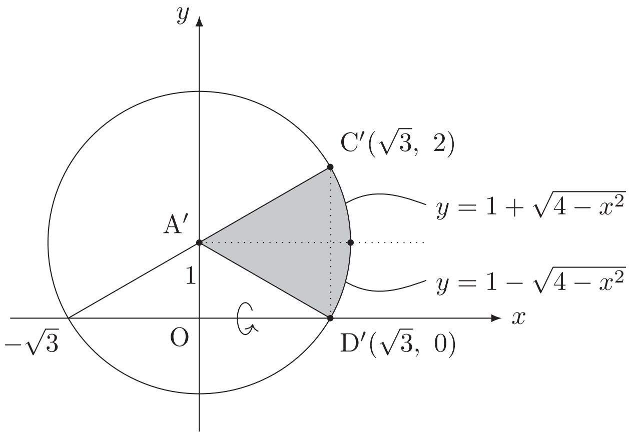
である．

$x+2y=k$ とすると，k の値が最大となるのは $x+2y-k=0$ が円 K に第 1 象限で接するときである（先の問いから傾きが $-\dfrac{1}{2}$ の直線は弧 CD と接することがわかる）．点と直線の距離公式から

$$\frac{|3\sqrt{2}-k|}{\sqrt{5}}=2 \iff k=3\sqrt{2}\pm 2\sqrt{5}$$

であるので，最大値は $\boldsymbol{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$ である．

(iii)　下図のように OD が x 軸上，円の中心 A が y 軸上となるように図をとりなおして考える．(A, C, D に対応する点を A$'$, C$'$, D$'$ とする)



このとき，円 K の方程式は $x^2+(y-1)^2=4 \iff y=1\pm\sqrt{4-x^2}$ である．

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\cdot 2^2\pi\cdot 2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\cdot 1^2\pi\cdot\sqrt{3}\times 2+\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}(1-\sqrt{4-x^2})^2dx \\
&= 2\sqrt{3}\pi+4\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \\
&= 2\sqrt{3}+4\pi\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi^2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{別解}}$

パップス・ギュルダンの定理 ((体積) = (重心の移動距離) × (面積)，つまり $V=2\pi|x_g|S$) を知っていれば，

$$
V=2\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi^2}
$$

とすぐに求めることができる．

2 $\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=2$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{6}$ の平行四辺形 OACB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$ である。また，平行四辺形 OACB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2) 点 O から対角線 AB に垂線を引き交点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\vec{b}$ である。また，直線 OD と辺 BC の交点を E とするとき，BE : EC を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{\text{シ}}:\boxed{\text{ス}}$ である。

(3) (2) のとき，3 点 O, A, D を通る円を K とし，その中心を F とする。円 K と直線 OC の交点で O でない方を G，円 K と直線 DF の交点で D でない方を H，円 K と直線 OB の交点で O でない方を I とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{b}$ であり，三角形 OAD の面積を S，五角形 OHAGI の面積を T とすると，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	1
$\sqrt{\text{イウ}}$	$\sqrt{11}$
$\sqrt{\text{エオ}}$	$\sqrt{35}$
$\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}\vec{a}+\dfrac{\text{ケ}}{\text{コサ}}\vec{b}$	$\dfrac{3}{11}\vec{a}+\dfrac{8}{11}\vec{b}$

解答記号	正解
シ : ス	3 : 5
$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}\vec{a}+\dfrac{\text{タ}}{\text{チ}}\vec{b}$	$\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$
$\dfrac{\text{ツテ}}{\text{トナニ}}$	$\dfrac{48}{103}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot2\cdot\dfrac{1}{6}=\mathbf{1}.$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=4-2+9=11\end{aligned}$$

したがって $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boldsymbol{\sqrt{11}}.$ また平行四辺形 OACB の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OAB}\times2&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\sqrt{9\cdot4-1}=\boldsymbol{\sqrt{35}}\end{aligned}$$

(2) D は 直線 AB 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおける．$\mathrm{OD}\perp\mathrm{AB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0&\iff\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\\&\iff-(1-t)|\vec{a}|^2+(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0\\&\iff 11t-8=0\\&\iff t=\frac{8}{11}\end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{11}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}\vec{b}.$

また $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{8}{11}\left(\dfrac{3}{8}\vec{a}+\vec{b}\right)$ と変形でき，E は直線 BC 上にあることから $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\vec{b}$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることがわかるので，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathbf{3:5}$ である．

(3) $\angle\mathrm{ODA}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，円 K は線分 OA を直径とする円である．よって $\angle\mathrm{OGA}=\dfrac{\pi}{2}$ である．G は直線 OC 上なので $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0&\iff(k\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\\&\iff k|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2&=|\vec{a}+\vec{b}|^2\\&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=9+2+4=15\\\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=9+1=10\end{aligned}$$

であるから，$15k-10=0\iff k=\dfrac{2}{3}$ を得るので $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{a}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{b}.$

$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{\sqrt{35}}{2} = U$ とおく．$\triangle\mathrm{OAC} = \triangle\mathrm{OBC} = U$ である．まず

$$S = \triangle\mathrm{OAD} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}\triangle\mathrm{OAB} = \frac{8}{11}U$$

である．また，五角形 OHAGI を線分 OA, OG で 3 つの三角形に分割し，それぞれの面積を考えると以下のようになる．

- 線分 OA, DH がいずれも円 K の直径であることから，四角形 OHAD は長方形である．したがって

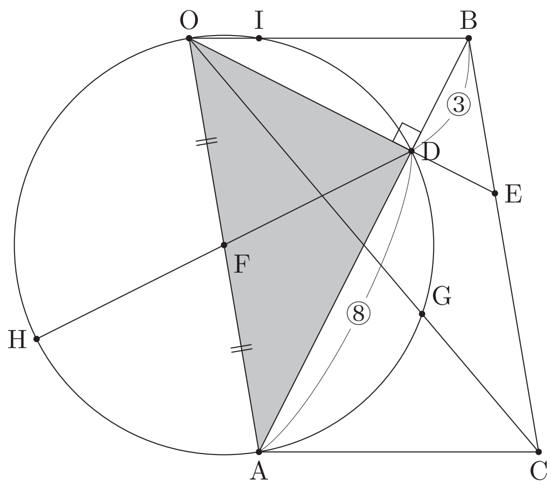
$$\triangle\mathrm{OAH} = S = \frac{8}{11}U$$

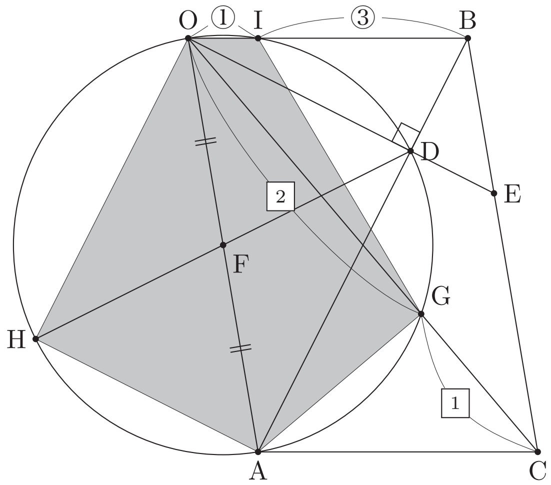
- $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\triangle\mathrm{OAG} = \dfrac{2}{3}U$
- $\angle\mathrm{OIA} = \dfrac{\pi}{2}$ なので，$\mathrm{OI} = \mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOI} = 3\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{OGI} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OC}}\triangle\mathrm{OBC} = \frac{\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}U = \frac{1}{6}U$$

以上から，

$$\frac{S}{T} = \frac{\triangle\mathrm{OAD}}{\triangle\mathrm{OAH} + \triangle\mathrm{OAG} + \triangle\mathrm{OGI}} = \frac{\frac{8}{11}U}{\frac{8}{11}U + \frac{2}{3}U + \frac{1}{6}U} = \mathbf{\frac{48}{103}}$$





$\boxed{3}$ 自然数 n に対して，定義域を $x \leqq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x) = x(1-x)^n,\ g_n(x) = x^2(1-x)^n$$

を定める。

(1) $f_2(x)$ の導関数は，

$$f_2{}'(x) = \left(x - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

であり，$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。また，$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2) すべての自然数 n に対して，

$$f_n(x) - g_n(x) = f_{n+\boxed{\text{コ}}}(x)$$

が成り立つ。

(3) $f_n(x)$ の導関数は，

$$f_n{}'(x) = \boxed{\text{サ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{シ}}\right)x - \boxed{\text{ス}}\right\}(1-x)^{n-1}$$

であり，$g_n(x)$ の導関数は，

$$g_n{}'(x) = \boxed{\text{セ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{ソ}}\right)x - \boxed{\text{タ}}\right\}x(1-x)^{n-1}$$

である。

(4) 2 つの曲線 $y = f_n(x)$，$y = g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると，

$$S_n = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\left(n + \boxed{\text{ツ}}\right)\left(n + \boxed{\text{テ}}\right)}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする。

また，関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
(x − ア)(イ x − ウ)	$(x-1)(3x-1)$
$\frac{\text{エ}}{\text{オカ}}$	$\frac{4}{27}$
$\frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$	$\frac{1}{16}$
コ	1

解答記号	正解
サ {(n + シ)x − ス }	$-\{(n+1)x-1\}$
セ {(n + ソ)x − タ }	$-\{(n+2)x-2\}$
$\frac{\text{チ}}{(n+\text{ツ})(n+\text{テ})}$	$\frac{1}{(n+2)(n+3)}$
$\frac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$	$\frac{1}{12}$

解説

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f_2{}'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f_2(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

(1) $f_2(x)=x(1-x)^2=x(x-1)^2$ より

$$f_2{}'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=\boldsymbol{(x-1)(3x-1)}$$

増減表より，極大値は $f_2\left(\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{27}}$ である.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g_2{}'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g_2(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	0

また，$g_2(x)=x^2(1-x)^2=x^2(x-1)^2$ より

$$g_2{}'(x)=2x(x-1)^2+2x^2(x-1)=2x(x-1)(2x-1)$$

増減表より，極大値は $g_2\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{16}}$ である.

(2)

$$\begin{aligned}f_n(x)-g_n(x)&=x(1-x)^n-x^2(1-x)^n=x(1-x)^n(1-x)\\&=x(1-x)^{n+1}=\boldsymbol{f_{n+1}(x)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}f_n{}'(x)&=(1-x)^n+x\cdot\{-n(1-x)^{n-1}\}\\&=-(1-x)^{n-1}\{(x-1)+nx\}=\boldsymbol{-\{(n+1)x-1\}(1-x)^{n-1}}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}g_n{}'(x)&=2x(1-x)^n+x^2\cdot\{-n(1-x)^{n-1}\}\\&=-x(1-x)^{n-1}\{2(x-1)+nx\}=\boldsymbol{-\{(n+2)x-2\}x(1-x)^{n-1}}\end{aligned}$$

(4) $f_n(x)=g_n(x)\iff f_{n+1}(x)=0$ より，$x=0,\ 1$ となる.
$0\leqq x\leqq 1$ において $f_n(x)-g_n(x)=f_{n+1}(x)\geqq 0$ なので，

$$S_n=\int_0^1\{f_n(x)-g_n(x)\}\,dx=\int_0^1 f_{n+1}(x)dx=\int_0^1 x(1-x)^{n+1}dx\cdots①$$

である．ここで，$1-x=t$ とおくと， $dx=-dt$ ，$x:0\to1$ のとき $t:1\to0$ であるから，

$$
\begin{aligned}
① &= \int_1^0 (1-t)t^{n+1}(-dt)\\
&= \int_0^1 (t^{n+1}-t^{n+2})dt\\
&= \left[\frac{1}{n+2}t^{n+2}-\frac{1}{n+3}t^{n+3}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}
\end{aligned}
$$

あるいは部分積分を用いて，

$$
\begin{aligned}
① &= \left[-\frac{1}{n+2}x(1-x)^{n+2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}(1-x)^{n+3}\right]_0^1\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}
\end{aligned}
$$

としてもよい．

また，${f_n}'(x)=0 \iff x=\dfrac{1}{n+1}$，1 であり，増減表より $x=\dfrac{1}{n+1}$ のとき $f_n(x)$ は極大となる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}$	$\cdots$	1
${f_n}'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f_n(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって $p_n=\dfrac{1}{n+1}$ なので，

$$
\sum_{n=1}^{\infty}p_nS_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right\}
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)\right\}
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}
$$

$$
=\boldsymbol{\frac{1}{12}}
$$

$\boxed{\text{別解}}$

ベータ関数 $\mathrm{B}(x,\ y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ において，$x,\ y$ が自然数のとき $\mathrm{B}(x,\ y)=\dfrac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$ が成り立つことを利用すれば（一般にはガンマ関数を用いて $\mathrm{B}(x,\ y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ と表せる）

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx\\
&= \mathrm{B}(2,\ n+2)=\frac{1!(n+1)!}{(n+3)!}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}
\end{aligned}
$$

と求められる．

講評

$\boxed{1}$ ［図形と方程式，数学Ⅲの積分］（やや易～やや難）

(2)(ii) までは，図形と方程式の典型問題であり，落とせない．$\frac{5}{12}\pi = 75°$ についての $\sin, \cos, \tan$ の値を覚えていると瞬時に答が出る設問があった．本学のみならず，医学部の入試ではもはや暗記事項かも知れない．最後の体積は，円弧の部分の回転体と円錐とに分けるとよいが，パップス・ギュルダンの定理を使うとすぐに答が出る．

$\boxed{2}$ ［平面ベクトル］（標準）

平行四辺形を題材とした典型問題であった．垂線を下ろす処理や，直角三角形の外接円についての知識は基本であり，(3) の前半までは落とせない．(3) の後半の面積比では，五角形を複数の三角形に分割するとよいが，各三角形について丁寧に考える必要があり，制限時間内に正解を出すのは難しかったかもしれない．

$\boxed{3}$ ［数学Ⅱと数学Ⅲの微積分，数列の極限］（標準）

関数の指数部分に文字 n が含まれてはいるが，問われていることはどれも基本的であり，できれば完答したいところである．(4) で，面積を求める際の部分積分，また極限を求める際の部分分数分解の処理が正しくできたか，がポイントだろう．

ここ数年と比較すると易化している．大問 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ それぞれの最後の設問は難しいが，それ以外は落とせない問題が多い．1 次合格の目標は 75%．