解答速報

関西医科大学(前期)　数学

2024年1月27日実施

解説動画公開中!!
https://youtu.be/cNlnNv-4nEM

I　n を 3 以上の整数とする。2 つの変量 $x,\ y$ のデータが, n 個の $x,\ y$ の値の組として $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$ で与えられている。この k 番目 $(1 \leqq k \leqq n)$ のデータが定数 a $\left(0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて次のように表されているとき，以下の設問に答えよ。

$$(x_k,\ y_k) = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n} + a\right),\ \cos\left(\frac{2\pi k}{n} - a\right)\right)$$

(1)　絶対値が 1 である複素数 $\alpha,\ \beta$ について，$\alpha \neq 1,\ \alpha^n = 1$ であるとき，次の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \beta$$

(2)　x と y の相関係数を求めよ。

解答

(1)　$\alpha \neq 1$ であることに注意すると，

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \beta = \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha^k = \beta \frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$$

であり，$\alpha^n = 1$ であることから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^k \beta = \mathbf{0}$ である.

注釈

問題文には「絶対値が 1 である複素数 $\alpha,\ \beta$」とあるが，この条件がなくても $\alpha \neq 1,\ \alpha^n = 1$ であれば結果は 0 になる.

(2)　$x,\ y$ のそれぞれの標準偏差を $\sigma_x,\ \sigma_y$ とし，$x,\ y$ の共分散を s_{xy} とすると，x と y の相関係数 r は $r = \dfrac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ である.

ここで複素数 $z_k = \cos\left(\dfrac{2\pi k}{n} + a\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n} + a\right)$ を定義すると，

$$\begin{aligned} z_k &= (\cos a + i\sin a)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= (\cos a + i\sin a)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \end{aligned}$$

となる．

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\ \beta=\cos a+i\sin a$$

とおけば，$z_k=\beta\alpha^k$ であり，この α に関して

$$\alpha\fallingdotseq 1\ (\because n\geqq 3),\quad \alpha^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

が成り立つ．したがって (1) で得た事実から $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k=0$ である．x の平均 $\overline{x}$ は，$\{z_k\}$ の実部の平均，つまり $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k$ の実部であるから，$\overline{x}=0$ である．

また，複素数 $w_k=\cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}-a\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n}-a\right)$ を定義すると

$$\begin{aligned}w_k&=\{\cos(-a)+i\sin(-a)\}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\\&=\overline{\beta}\alpha^k\end{aligned}$$

であるから，y の平均 $\overline{y}$ について，同様の議論により $\overline{y}=0$ となる．

以上から，x_k の分散は

$$\sigma_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}^2$$

となる．

$$x_k{}^2=\cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}+a\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi k}{n}+2a\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}\sigma_x{}^2&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi k}{n}+2a\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{4\pi k}{n}+2a\right)\end{aligned}$$

となる．ここで $\cos\left(\dfrac{4\pi k}{n}+2a\right)$ は $z_k{}^2=\cos\left(\dfrac{4\pi k}{n}+2a\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi k}{n}+2a\right)$ の実部である．
$z_k{}^2=\beta^2\alpha^{2k}=\beta^2(\alpha^2)^k$ であり，$n\geqq 3$ より $\alpha^2\fallingdotseq 1$，また $(\alpha^2)^n=(\alpha^n)^2=1$ であるから，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}\beta^2(\alpha^2)^k=0$ である．したがって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{4\pi k}{n}+2a\right)=0\cdots$① なので，$\sigma_x{}^2=\dfrac{1}{2}$，つまり $\sigma_x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とわかる．

同様にして y_k の分散は $\displaystyle\sigma_y{}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k{}^2=\frac{1}{2}$ であり，$\sigma_y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とわかる．

また，x，y の共分散は同じく $\overline{x}=0$，$\overline{y}=0$ を用いて

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

となる．積→和の変形を用いることにより

$$x_k y_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + a\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{n} - a\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi k}{n} + \cos 2a\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi k}{n} + \cos 2a\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4\pi k}{n} + \frac{1}{2}\cos 2a \end{aligned}$$

となる．このうち和の部分については，① において $a = 0$ とすることで 0 になるとわかるので，$s_{xy} = \dfrac{1}{2}\cos 2a$ である．

以上から，x と y の相関係数は

$$r = \frac{s_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\dfrac{1}{2}\cos 2a}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \boldsymbol{\cos 2a}$$

解説動画公開中!！
https://youtu.be/EMCXAdXLLbQ

II　n を正の整数とする。a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_2, a_1 を，それぞれ 0 または 1 とするとき，$a_n\times(-2)^{n-1}+a_{n-1}\times(-2)^{n-2}+\cdots+a_2\times(-2)^1+a_1$ と表される整数を $[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表現する。例えば,
$[110]=1\times(-2)^2+1\times(-2)^1+0=2$ であり,
$[1110]=1\times(-2)^3+1\times(-2)^2+1\times(-2)^1+0=-6$ である。
また，ある n に対して $[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表すことのできる整数全体の集合を S_n とする。例えば，$S_1=\{0,\ 1\}$, $S_2=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ である。以下の設問に答えよ。

(1)　S_3 を要素を書き並べて表せ。答えだけで良い。

(2)　S_n の要素は連続する 2^n 個の整数であることを示せ。さらに S_n の要素 x に対して，$x=[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表すことのできる a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_2, a_1 の組は，ただ一通りであることを示せ。

(3)　-24 を $[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表せ。

(4)　2024 を $[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表せ。

解答

(1)　$[0\ 0\ 0]=0$, $[0\ 0\ 1]=1$, $[0\ 1\ 0]=-2$, $[0\ 1\ 1]=-1$, $[1\ 0\ 0]=4$, $[1\ 0\ 1]=5$, $[1\ 1\ 0]=2$, $[1\ 1\ 1]=3$ となるので,

$$S_3=\boldsymbol{\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}}$$

(2)　(前半) 数学的帰納法で示す．$n=1$ のときは明らか．$n=k$ のときに，S_k の要素が連続する 2^k 個の整数であると仮定する．S_{k+1} の要素のうち，$a_{k+1}=0$ であるものは S_k の要素と一致し，$a_{k+1}=1$ であるものは，S_k の要素それぞれに $(-2)^k$（つまり 2^k または -2^k）を加えたものなので，S_{k+1} の要素は連続する 2^{k+1} 個の整数となる．以上から題意は示された．　(証明終)

(後半) a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_2, a_1 はそれぞれ 1 か 0 の 2 通りずつであるので，a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_2, a_1 の組の総数は 2^n 通りある．これと S_n の要素の個数が一致するため $x=[a_n\ a_{n-1}\ \cdots\ a_2\ a_1]$ と表すことのできる a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_2, a_1 の組は，ただ一通りに定まる．　(証明終)

(3)　$(-2)^3+(-2)^1>-24$ より，S_5 の要素の中に -24 は存在しない．そこで $a_6=1$ とすると $-24=-32+8$ であり，$8=(-2)^4+(-2)^3$ となるので,

$$1\times(-2)^5+1\times(-2)^4+1\times(-2)^3+0\times(-2)^2+0\times(-2)^1+0=-24$$

と表される．したがって,

$$-24=\boldsymbol{[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]}$$

(4)　$2048=(-2)^{12}+(-2)^{11}=[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$ であるので，(3) の結果を用いて,

$$\begin{aligned}2024&=2048+(-24)\\&=[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]+[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]\\&=\boldsymbol{[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]}\end{aligned}$$

別解

「整数 n を -2 で割った余り」とは，「m を整数として n を $n=-2m+r$ ($r=0$ あるいは $r=1$) と表したときの r のことである」と定義すると，次のように筆算で計算することも可能である．

$$
\begin{array}{rrc}
-2 &) & -24 \\ \cline{2-3}
-2 &) & 12 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -6 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 3 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -1 & \cdots & \boxed{1} \\ \cline{2-3}
 & & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1}
\end{array}
\qquad \therefore\ -24 = [\mathbf{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0}]
$$

$$
\begin{array}{rrc}
-2 &) & 2024 \\ \cline{2-3}
-2 &) & -1012 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 506 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -253 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 127 & \cdots & \boxed{1} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -63 & \cdots & \boxed{1} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 32 & \cdots & \boxed{1} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -16 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 8 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -4 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & 2 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
-2 &) & -1 & \cdots & \boxed{0} \\ \cline{2-3}
 & & \boxed{1} & \cdots & \boxed{1}
\end{array}
\qquad \therefore 2024 = [\mathbf{1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0}]
$$

解説動画公開中!！
https://youtu.be/q3X1sHP8iLs

Ⅲ　複素数平面上に，原点 O と点 A(a) をとる。ただし a は実数の定数で $0<a$ を満たす。点 z が線分 OA の垂直二等分線上を動くとき，$w_1=z^2$ で表される点 w_1 と，$w_2=-\dfrac{1}{z}$ で表される点 w_2 が描く図形をそれぞれ C, D とする。C と D の共有点の個数を求めよ。

解答

OA の垂直二等分線上の点 z は，b を実数の変数として $z=\dfrac{a}{2}+bi$ とおくことができる．このとき

$$w_1=z^2=\left(\frac{a}{2}+bi\right)^2=\frac{a^2}{4}-b^2+abi$$

$w_1=x+yi$（x, y は実数）とすると $x=\dfrac{a^2}{4}-b^2$, $y=ab$ である．b を動かしたときの w_1 の軌跡 C は x, y から b を消去することにより，$x=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{y^2}{a^2}$ とわかる．これは軸が x 軸に一致している横向きの放物線である．

OA の垂直二等分線は $z+\overline{z}=a$ と書けるので D に関しては

$$\begin{aligned}
&z+\overline{z}=a\\
\iff& -\frac{1}{w_2}-\frac{1}{\overline{w_2}}=a\\
\iff& w_2\overline{w_2}+\frac{w_2}{a}+\frac{\overline{w_2}}{a}=0 \text{ かつ } w_2\fallingdotseq 0\\
\iff& \left(w_2+\frac{1}{a}\right)\left(\overline{w_2}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2} \text{ かつ } w_2\fallingdotseq 0\\
\iff& \left|w_2+\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a} \text{ かつ } w_2\fallingdotseq 0
\end{aligned}$$

である．これは $-\dfrac{1}{a}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{a}$ の円を表し，$w_2=x+yi$（x, y は実数）とすると，その方程式は $\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}$ である．ただし原点は除く．

したがって，放物線 $x=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{y^2}{a^2}\cdots$① と円 $\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{a^2}\cdots$② の共有点の個数を調べることになる．(① は原点を通らないので，② の除外点を考慮する必要はない．)

① より $y^2=\dfrac{a^4}{4}-a^2x$ である．これを ② に代入する．

$$\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{a^4}{4}-a^2x\right)=\frac{1}{a^2}$$
$$x^2+\left(\frac{2}{a}-a^2\right)x+\frac{a^4}{4}=0\cdots③$$

$f(x)=x^2+\left(\dfrac{2}{a}-a^2\right)x+\dfrac{a^4}{4}$ とおく．$f(x)=0$ の判別式を D_1 とすると

$$D_1=\left(\frac{2}{a}-a^2\right)^2-a^4=\frac{4}{a^2}-4a=\frac{4}{a^2}(1-a^3)$$

(i)　$a>1$ だと $D_1<0$ なので ③ は実数解を持たず，①, ② は共有点を持たない．

(ii)　$a=1$ だと ③は $x^2+x+\dfrac{1}{4}=0$ となり $x=-\dfrac{1}{2}$ を重解に持つ．このとき $y^2=\dfrac{3}{4}$ だから $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，交点は 2 つである．

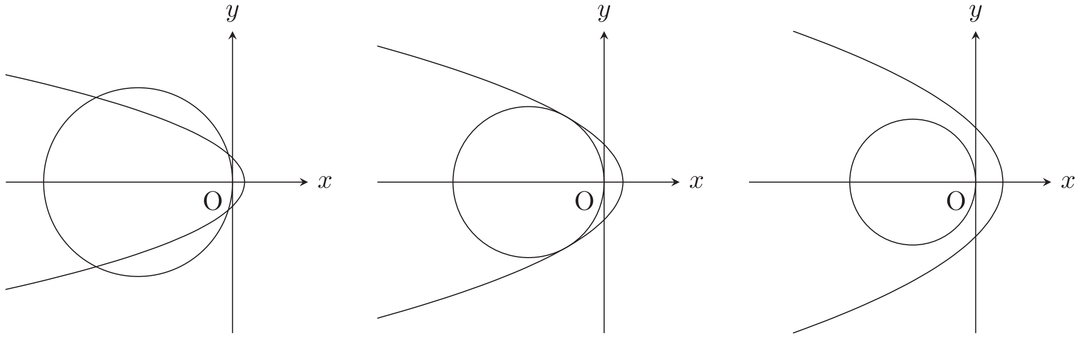
(iii)　$0<a<1$ の場合，$D_1>0$ であるから③ は異なる 2 つの実数解を持つ．

その場合，③ の軸 $x=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^3-2}{2a}$ は負である．また $f(0)=\dfrac{a^2}{4}$ は正である．

したがって $f(x)=0$ の 2 解はともに負であり，そのときの $y^2=\dfrac{a^4}{4}-a^2x$ の値は正である．

このことから ③ の 2 つの実数解 x は，どちらも 2 つの y の値に対応することがわかる，したがって共有点は 4 個である．

以上により答えは，$\boldsymbol{0<a<1}$ **のとき 4 個，**$\boldsymbol{a=1}$ **のとき 2 個，**$\boldsymbol{a>1}$ **のとき 0 個**．



別解

$p,\ q$ を実数とする．C 上の点は $\left(\dfrac{a}{2}+pi\right)^2$ と表される．p と点の対応は $1:1$ である．また D 上の点は $-\dfrac{1}{\frac{a}{2}+qi}$ と表される．q と点の対応は $1:1$ である．

したがって C と D の共有点の個数は $\left(\dfrac{a}{2}+pi\right)^2=-\dfrac{1}{\frac{a}{2}+qi}$ を満たす $(p,\ q)$ の個数と同じであり，それは p の個数とも q の個数とも一致する．それを調べるとよい．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a}{2}+pi\right)^2=-\frac{1}{\frac{a}{2}+qi}\\ \iff&\left(\frac{a}{2}+pi\right)^2\left(\frac{a}{2}+qi\right)=-1\\ \iff&(a+2pi)^2(a+2qi)+8=0\\ \iff&(a^3-4ap^2-8apq+8)+2\{2a^2p+(a^2-4p^2)q\}i=0\\ \iff&a^3-4ap^2-8apq+8=0\ \text{かつ}\ 2a^2p+(a^2-4p^2)q=0\end{aligned}$$

最後の 2 式から q を消去すると

$$\begin{aligned}&(a^2-4p^2)(a^3-4ap^2+8)+16a^3p^2=0\\ \iff&16ap^4+8(a^3-4)p^2+a^5+8a^2=0\end{aligned}$$

となるが，これを p^2 の方程式とみて解の個数を調べればよい．判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4}=16(a^3-4)^2-16a(a^5+8a^2)=256(1-a^3)$$

となる．$0<a\leqq 1$ のとき p^2 の解はすべて正になるので，同じ結果が得られる．

解説動画公開中!！
https://youtu.be/0XUtS3HD0E0

Ⅳ　平面上に，半径 1 の円 O_1，半径 4 の円 O_2，半径 r の円 O_3 と，3 本の直線 l_1, l_2, l_3 を，次の条件をすべて満たすように定める。

- 円 O_1 は直線 l_1 に点 A で接し，直線 l_2 は A を通って直線 l_1 に直交する。
- 円 O_2 は，中心が l_2 上にあり，かつ A とは異なる点で O_1 に外接している。
- 円 O_3 は，O_1, O_2 のどちらにも外接し，かつ l_1 に点 B で接する。
- 直線 l_3 は，O_2 と O_3 の共通接線であり O_1 と共有点を持たない。

l_3 と l_1 の交点を C，l_3 と l_2 の交点を D とするとき，以下の設問に答えよ。

(1)　r の値を求めよ。

(2)　線分 AB の長さを求めよ。

(3)　線分 AC の長さを求めよ。

(4)　線分 AD の長さを求めよ。

解答

円 O_1, O_2, O_3 の中心をそれぞれ C_1, C_2, C_3 とし，

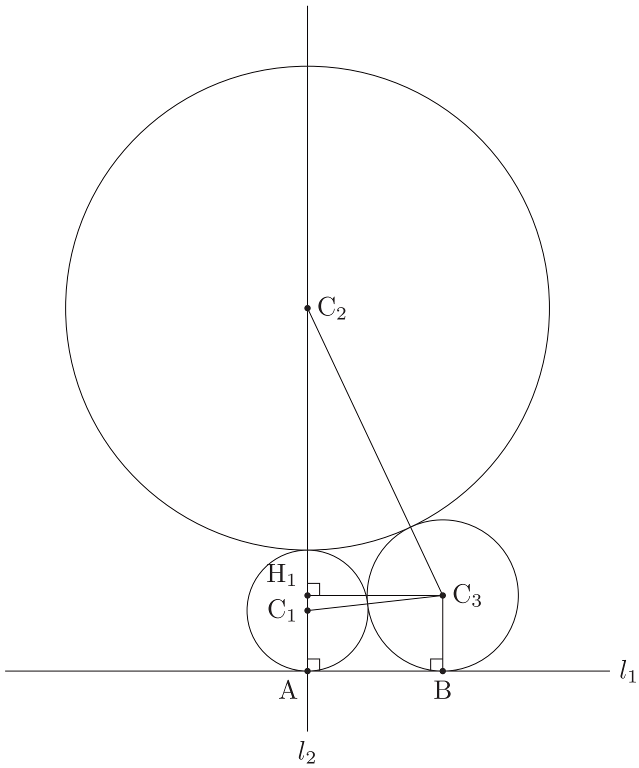
- C_3 から l_2 に下ろした垂線と l_2 の交点を H_1
- C_2 から l_3 に下ろした垂線と l_3 の交点を H_2
- C_3 から l_3 に下ろした垂線と l_3 の交点を H_3
- C_3 から 直線 $\mathrm{C}_2\mathrm{H}_2$ に下ろした垂線と l_2 の交点を H_4

とする.

(1)　直角三角形 $\triangle\mathrm{C}_3\mathrm{C}_2\mathrm{H}_1$ および $\triangle\mathrm{C}_3\mathrm{C}_1\mathrm{H}_1$ に三平方の定理を用いると,

$$\mathrm{C}_3{\mathrm{H}_1}^2 = \mathrm{C}_2{\mathrm{C}_3}^2 - \mathrm{C}_2{\mathrm{H}_1}^2 = \mathrm{C}_1{\mathrm{C}_3}^2 - \mathrm{C}_1{\mathrm{H}_1}^2$$

より $(4+r)^2 - (6-r)^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 \iff r = \mathbf{\dfrac{5}{4}}$ である.



(2)　(1) より $\mathrm{AB}=\mathrm{C_3H_1}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}+1\right)^2-\left(\frac{5}{4}-1\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$ である．

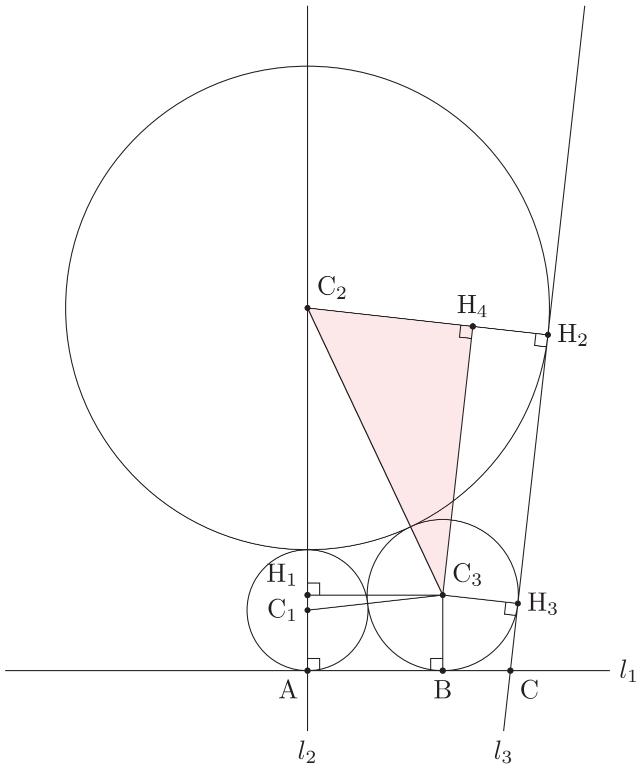
(3)　直角三角形 $\triangle\mathrm{C_2C_3H_4}$ において三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{H_2H_3}^2=\mathrm{H_4C_3}^2=\mathrm{C_2C_3}^2-\mathrm{C_2H_4}^2$$

より

$$\begin{aligned}\mathrm{H_2H_3}&=\sqrt{\left(4+\frac{5}{4}\right)^2-\left(4-\frac{5}{4}\right)^2}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

である．



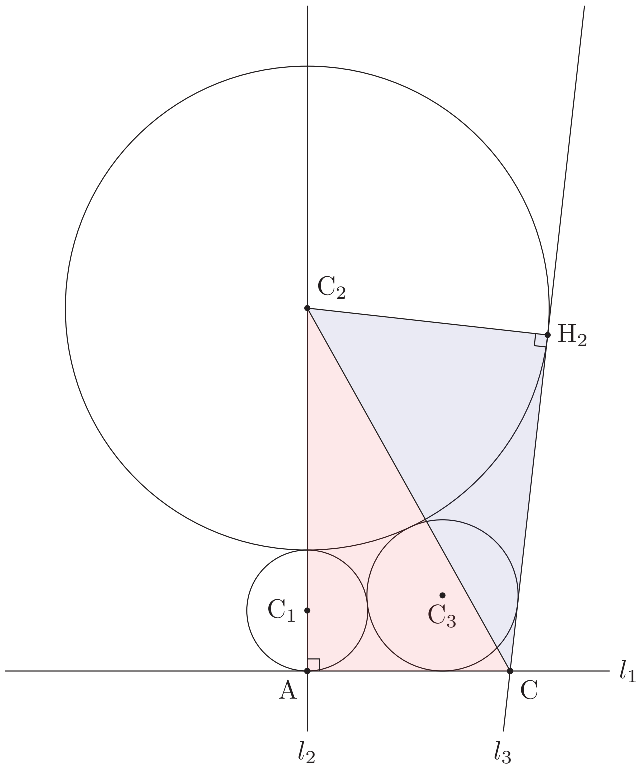
ここで，$BC = CH_3 = x$ とおいて，直角三角形 $\triangle ACC_2$ および $\triangle H_2C_2C$ において三平方の定理を用いると，

$$CC_2{}^2 = AC^2 + AC_2{}^2 = H_2C_2{}^2 + H_2C^2$$

より

$$(\sqrt{5} + x)^2 + 6^2 = (2\sqrt{5} + x)^2 + 4^2 \iff x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

であるから，$AC = \sqrt{5} + x = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$ である.



$\boxed{\text{別解}}$

l_1 を x 軸，l_2 を y 軸とみなすと，

- $\mathrm{O}_1 : x^2+(y-1)^2=1$
- $\mathrm{O}_2 : x^2+(y-6)^2=16$
- $\mathrm{O}_3 : (x-\sqrt{5})^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$

とおくことができる．このとき，直線 $\mathrm{C_2C_3}$ と l_3 との交点は $\mathrm{C_2}(0,\ 6)$ と $\mathrm{C_3}\left(\sqrt{5},\ \dfrac{5}{4}\right)$ を $\mathrm{O_2}$ と $\mathrm{O_3}$ の半径の比 $4:\dfrac{5}{4}=16:5$ に外分する点

$$\frac{-5(0,\ 6)+16\left(\sqrt{5},\ \dfrac{5}{4}\right)}{16-5}=\left(\frac{16\sqrt{15}}{11},-\frac{10}{11}\right)$$

を通るので，$l_3 : y=m\left(x-\dfrac{16\sqrt{5}}{11}\right)-\dfrac{10}{11} \iff 11mx-11y-16\sqrt{5}m-10=0$ とおける．点 $\mathrm{C_2}$ と l_3 の距離は 4 であるから，

$$\frac{|-66-16\sqrt{5}m-10|}{11\sqrt{m^2+1}}=4 \iff m=-\frac{12\sqrt{5}}{41},\ 4\sqrt{5}$$

を得るので，l_3 の傾きは $m=4\sqrt{5}$，すなわち $l_3 : y=4\sqrt{5}\left(x-\dfrac{16\sqrt{5}}{11}\right)-\dfrac{10}{11}\cdots$① である．したがって，この直線の方程式に $y=0$ を代入して $x=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ となるので，$\mathrm{AC}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

$\angle\mathrm{C_3C_2H_1}=\alpha,\ \angle\mathrm{C_3C_2H_4}=\beta$ とおく．

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{C_3H_1}}{\mathrm{C_3C_2}}=\frac{\sqrt{5}}{\dfrac{21}{4}}=\frac{4\sqrt{5}}{21}$$

$$\cos\beta=\frac{\mathrm{C_2H_4}}{\mathrm{C_2C_3}}=\frac{\dfrac{11}{4}}{\dfrac{21}{4}}=\frac{11}{21}$$

これより $\cos\alpha=\dfrac{19}{21}$，$\sin\beta=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$ となり，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{19}{21}\cdot\frac{11}{21}-\frac{4\sqrt{5}}{21}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}=\frac{1}{9}$$

を得る．

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{C_2H_2}}{\mathrm{DC_2}} \iff \frac{1}{9}=\frac{4}{\mathrm{DC_2}} \iff \mathrm{DC_2}=36$$

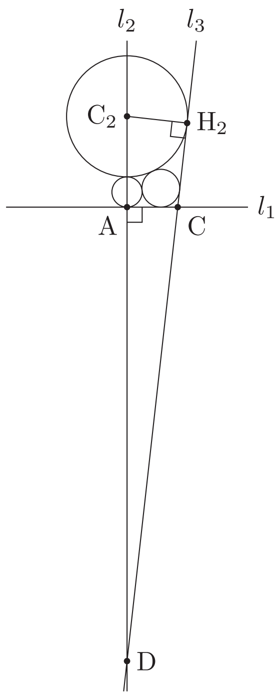
$\mathrm{DC_2}=\mathrm{C_2A}+\mathrm{AD}$ なので $36=6+\mathrm{AD}$ より $\mathrm{AD}=30$ となる（これは (4) の答である）．また $\angle\mathrm{ACD}=\alpha+\beta$ であり $\tan(\alpha+\beta)=4\sqrt{5}$ になるので $\mathrm{AC}\tan(\alpha+\beta)=\mathrm{AD}$ より $\mathrm{AC}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt{5}}$ である．

(4)　(3) の議論より $\mathrm{CH_2}=\mathrm{CH_3}+\mathrm{H_3H_2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{5}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ である．ここで，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{CD}=y$ とおくと，$\triangle\mathrm{DAC}$ と $\mathrm{DH_2C_2}$ は相似であるから，

$$\mathrm{DA}:\mathrm{AC}:\mathrm{CD}=\mathrm{DH_2}:\mathrm{H_2C_2}:\mathrm{C_2D}$$

$$\iff x : \frac{3\sqrt{5}}{2} : y = \left(y + \frac{5\sqrt{5}}{2}\right) : 4 : (x+6)$$

が成り立つ．これを解いて $(x,\ y) = \left(30, \dfrac{27\sqrt{5}}{2}\right)$ となるので $\mathrm{AD} = \mathbf{30}$ である．



$\boxed{\text{別解}}$

① に $x=0$ を代入して $y=-30$ となるので $\mathrm{AD} = \mathbf{30}$ としてもよい．

$\boxed{\text{別解}}$

$\angle \mathrm{C_3CB} = \angle \mathrm{C_3CH_3} = \gamma$ とおくと，

$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{C_3B}}{\mathrm{CB}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

であるから，$\tan 2\gamma = -4\sqrt{5}$ がわかる．このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AD} &= \mathrm{AC}\tan(\pi - 2\gamma)\\ &= -\mathrm{AC}\tan 2\gamma\\ &= \mathbf{30}\end{aligned}$$

である．

解説動画公開中!！
https://youtu.be/z_l3iZ1LhJ8

講評

Ⅰ［データの分析，複素数］（やや難）

(1) は典型題であり落とせない．(2) は，(1) の誘導に乗りたいところだが，cos だけでなく sin も持ち出して極形式を利用する，という発想は難度が高いだろう．相関係数の定義と一般的な求め方を書いておくくらいしかできなかった受験生が多いと思われる．

Ⅱ［整数］（難）

n 進法に関連した問題．(1) は題意を読み取って確実に解けてほしい．(2) では 2 種類の証明問題が問われているが，自力で書くのは難しかっただろう．(3) は粘り強く調べていけば正解できる．(4) は (3) をうまく利用できるかがポイントだが，試験時間内では気づきにくいかもしれない．

Ⅲ［複素数，図形と方程式］（難）

複素数の問題だと思って複素数らしく解こうとすると埒が明かないだろう．実部と虚部に分けて，放物線と円の共有点を考える問題に読み替えないといけない．もちろん連立させて判別式を考えるのだが，y^2 を消去する場合，x が実数解を持っても y が実数解を持たないことが起こりえる．そこまで考えるとかなり大変なので，減点を覚悟のうえで判別式だけで終えるのが実際的かもしれない．

Ⅳ［平面図形］（やや難）

平面図形の出題．三平方の定理や相似を用いたり，角度を設定して三角比と加法定理を利用したり，xy 座標平面の問題にして図形の方程式を利用したりと，解法はさまざま考えられるだろう．解答例における線分 $\mathrm{C_3H_4}$ などのように，共通接線に平行な補助線を引くことは基本的である．$\mathrm{BC} = \mathrm{CH_3} = x$ のように未知の辺の長さを文字設定する発想は浮かびにくかったかもしれない．基本的には愚直に計算するだけの問題であるが，正解にたどり着くのは難しかっただろう．

形式上の変化はなかったが，難度が非常に高い．例年，Ⅰ，Ⅱ 辺りは完答しやすいことが多かったが，今回はそういう問題がない．確実にとりたいのは Ⅰ (1) と Ⅱ (1)(3) くらいで，あとは Ⅲ と Ⅳ の前半でどれだけ立ち回れたか，という勝負になりそうである．微積分の出題がなく，複素数平面や平面図形，図形と方程式など図形やグラフをテーマとする出題が多いのも特筆すべき点である．

1 次合格の目標は 35%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ