医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

兵庫医科大学　数学

2024年1月24日実施

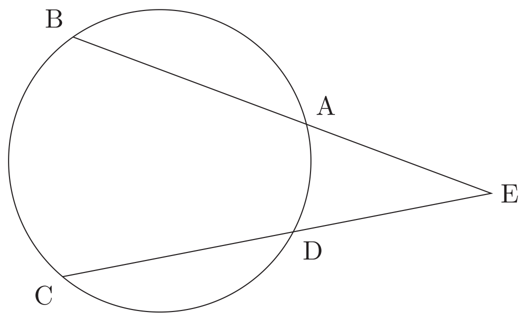
解説動画公開中!!
https://youtu.be/dK0D0gHV31Q

$\boxed{1}$ 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 2 点 $\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$，$\mathrm{B}(\overrightarrow{b})$ が条件 $2|\overrightarrow{a}| = 3|\overrightarrow{b}| \neq 0$ を満たし，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は 60° である。このとき，直線 AB 上にあり，原点から最も近い点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ について，$\overrightarrow{p}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2) 誕生月を考える。任意に 5 人を選んだところ，少なくとも 2 人以上が同じ誕生月である確率を求めよ。ただし，1 月から 12 月まで，どの月に生まれるかは同様に確からしいとする。

(3) 図において，4 点 A, B, C, D は同一円周上にあり，直線 BA と直線 CD の交点を E とする。$\angle \mathrm{AED} = 36^\circ$ で，弧 AB，弧 BC および弧 CD はすべて長さが等しいとき，$\angle \mathrm{ACD}$ の大きさを求めよ。



(4) 複素数平面上の点 z に対して，$w = (1+2i)(z+2)$ で表される点 w がある。点 z が単位円上を動くとき，$|w+1|$ の最大値を求めよ。

(5) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = 2\sin 2x \sin x + 3\sin^2 x + 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答

(1)　$|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=2$ としても一般性を失わない．このとき，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos 60^\circ=3$$

である．点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{p}=t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$$

とおける．題意をみたすとき $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$ であることから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})\\&=\{t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}\}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})\\&=3t-9t+4(1-t)-3(1-t)\\&=-7t+1\\&=0\end{aligned}$$

より $t=\dfrac{1}{7}$ がわかるので，$\boldsymbol{\overrightarrow{p}=\dfrac{\overrightarrow{a}+6\overrightarrow{b}}{7}}$ である．

(2)　余事象は「任意の 5 人が全て異なる誕生月である」であり，その確率は

$$\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{12}=\frac{55}{144}$$

であるから，求める確率は $1-\dfrac{55}{144}=\boldsymbol{\dfrac{89}{144}}$ である．

(3)　$\angle\mathrm{ACD}=x$, $\angle\mathrm{ACB}=y$ とする．$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}$ であることから，円周角の定理より

$$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{ADB}=y$$

である．したがって，△ABC の内角について

$$x+3y=180^\circ\cdots①$$

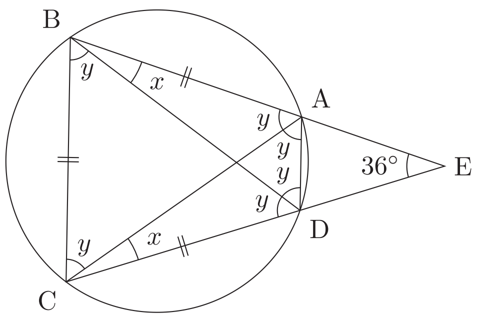
が成り立つ．また，△ACE の ∠A の外角について

$$x+36^\circ=y\cdots②$$

も成り立つので，①, ② を解いて，$x=\angle\mathrm{ACD}=\mathbf{18^\circ}$ である．

注釈

四角形 ABCD は等脚台形である．



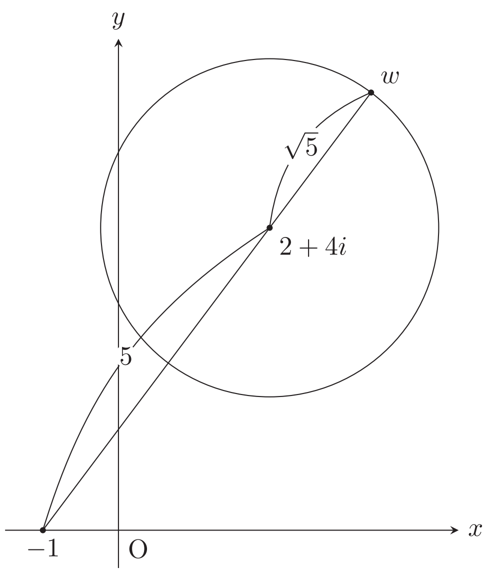
(4)　与式より

$$z = \frac{w}{1+2i} - 2$$

である．点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くので，$|z| = 1$ に代入すると，

$$\begin{aligned} &\left|\frac{w}{1+2i} - 2\right| = 1 \\ \iff &\left|\frac{w-2-4i}{1+2i}\right| = 1 \\ \iff &\quad |w-2-4i| = \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる．よって，点 w は中心 $2+4i$，半径 $\sqrt{5}$ の円周上にある．点 $2+4i$ と点 -1 の距離は 5 なので，図より点 w と点 -1 の距離の最大値，すなわち $|w+1|$ の最大値は $\mathbf{5+\sqrt{5}}$ である．



(5)　$f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\sin^2 x\cos x + 3\sin^2 x + 4\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) \\ &= 4(1-\cos^2 x)\cos x + 3(1-\cos^2 x) + 2(1+\cos x) \\ &= -4\cos^3 x - 3\cos^2 x + 6\cos x + 5 \end{aligned}$$

と変形できるので，$t = \cos x$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq 1)$

$$f(x) = -4t^3 - 3t^2 + 6t + 5$$

となる．この t の 3 次関数を $g(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12t^2 - 6t + 6 \\ &= -6(t+1)(2t-1) \end{aligned}$$

となるので，増減は以下の通りである．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	4

したがって $t = -1$ のとき，すなわち $x = \boldsymbol{\pi}$ のとき最小値 $\mathbf{0}$．$t = \frac{1}{2}$ すなわち $x = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$，$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{27}{4}}$ である．

解説動画公開中!！
https://youtu.be/NfU5ZneFCJw

$\boxed{2}$ 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。n を正の整数として，以下の問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1) $0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq n^2,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ を満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(3) 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(n,\ 3n)$，$\mathrm{B}(10n,\ 0)$ がある。このとき，

(a) $\triangle\mathrm{OAB}$ の周および内部にある格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(b) $\triangle\mathrm{OAB}$ の内心の座標 I と外心の座標 $\mathrm{O_1}$ をそれぞれ求めよ。

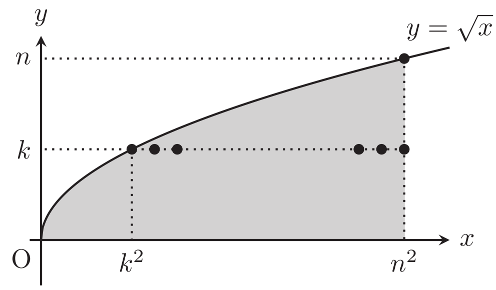
解答

(1) 題意を満たす格子点 $(x,\ y)$ は，

$y=0$ のとき $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 5 個.
$y=1$ のとき $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 4 個.
$y=2$ のとき $x=4$ の 1 個.

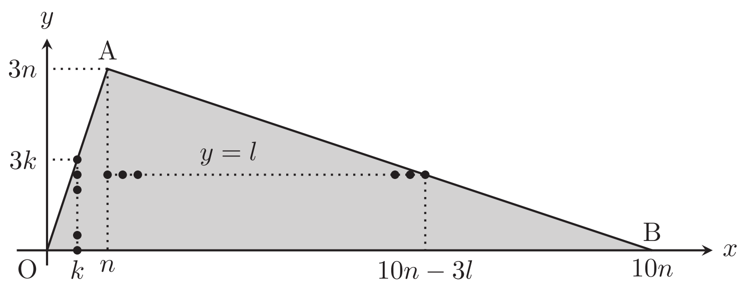
以上より **10** 個.

(2) $0 \leqq k \leqq n$ である整数 k を固定する．直線 $y=k$ 上の格子点 $(x,\ k)$ が題意を満たすためには $k^2 \leqq x \leqq n^2$ であればよく，その個数は n^2-k^2+1 である．したがって求める格子点の個数は



$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)$$
$$=(n+1)(n^2+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)}$$

(3) (a) 題意を満たす格子点 $(x,\ y)$ のうち $0 \leqq x < n$ であるものを S 個，$n \leqq x \leqq 10n$ であるものを T 個とする．



(i) S について．

直線 $x=k\quad(0 \leqq k \leqq n-1)$ 上の格子点は $(k,\ 0)$〜$(k,\ 3k)$ の $3k+1$ 個存在する．したがって

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}(3k+1)=\frac{3}{2}(n-1)n+n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

(ii) T について．

$x \geqq n$ において，直線 $y=l\ (0 \leqq l \leqq 3n)$ 上の格子点は $(n,\ l)$〜$(10n-3l,\ l)$ の $9n-3l+1$ 個存在する．

したがって

$$T=\sum_{l=0}^{3n}(9n+1-3l)=(3n+1)(9n+1)-\frac{3}{2}\cdot 3n(3n+1)=\frac{27}{2}n^2+\frac{15}{2}n+1$$

以上により求める格子点の個数は

$$S+T=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{27}{2}n^2+\frac{15}{2}n+1=\boldsymbol{15n^2+7n+1}$$

別解

線分 OB を底辺として高さが $3n$ である長方形の内部または周上の格子点から，直角三角形の内部または周上の格子点（2 箇所）を除く方法でも求めることができる．

$$(10n+1)(3n+1)-\frac{(n+1)(3n+1)-(n+1)}{2}-\frac{(9n+1)(3n+1)-(3n+1)}{2}=\boldsymbol{15n^2+7n+1}$$

注釈

座標平面上で格子点をつないでできる（穴のない）多角形 X に関しては，次の Pick の公式が知られている．

$$(\text{X の面積})=(\text{X の内部の格子点の数})+\frac{(\text{X の 周上の格子点の数})}{2}-1$$

本問の場合，面積 $=15n^2$, (X の 周上の格子点の数) $=(10n-1)+(n-1)+(3n-1)+3=14n$ だから，直ちに答えが得られる．

(b) 内心について

内接円と x 軸との接点と原点との距離を d とし，内接円の半径を r とすると，内心 I の座標は $(d,\ r)$ となる．まず $n=1$ のときについて考える．このとき A$(1,\ 3)$, B$(10,\ 0)$ であり，$\mathrm{OA}=\sqrt{10}$, $\mathrm{OB}=10$, $\mathrm{AB}=3\sqrt{10}$ である．

まず r については

$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{OAB}=\frac{r}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})\\ \iff\ &\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3=\frac{r}{2}\left(\sqrt{10}+10+3\sqrt{10}\right)\\ \iff\ &r=2\sqrt{10}-5\end{aligned}$$

となる．次に d については，内接円と OA, OB, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とすると，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=d$ であり，

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}=\sqrt{10}-d$$

$$\mathrm{BR}=\mathrm{BQ}=10-d$$

これと $\mathrm{AB}=\mathrm{AR}+\mathrm{BR}=3\sqrt{10}$ より，

$$\sqrt{10}-d+10-d=3\sqrt{10}\iff d=5-\sqrt{10}$$

が得られる．

以上から $\mathrm{I}\big(5-\sqrt{10},\ 2\sqrt{10}-5\big)$ である．$n=1$ でない場合はこの n 倍になるので

$$\boldsymbol{\mathrm{I}\left((5-\sqrt{10})n,\ (2\sqrt{10}-5)n\right)}$$

別解

三角形において内角の二等分線が対辺を隣り合う辺の長さの比に内分する事実を用いると，△ABC において任意の始点を O として，一般に

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

が成り立つ（ $\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ ）．これを用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{1}{10+\sqrt{10}+3\sqrt{10}}\left(10\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{10}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\sqrt{10}\,\overrightarrow{\mathrm{OO}}\right)\\&=\frac{1}{10+\sqrt{10}+3\sqrt{10}}\left\{10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\sqrt{10}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}+3\sqrt{10}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{10+4\sqrt{10}}\begin{pmatrix}10+10\sqrt{10}\\30\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5-\sqrt{10}\\2\sqrt{10}-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(以下略)

外心について

$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ である．直角三角形の外心は斜辺の中点であるから $\mathbf{O_1(5\boldsymbol{n},\ 0)}$.

解説動画公開中!！
https://youtu.be/ME-thEmYhHM

$\boxed{3}$ $t>1$ とする。関数 $f(x)=x\log t-t\log x$ について，以下の問いに答えよ。なお，途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最小値が 0 以下であることを示せ。

(3) $e^{\sqrt{5}}$ と $\sqrt{5}^{e}$ の大小関係を調べよ。

(4) 関数 $F(t)=\displaystyle\int_1^t f(x)dx$ について，$F'(e)$ を求めよ。

解答

(1) $f'(x)=\log t-\dfrac{t}{x}=\dfrac{x\log t-t}{x}$ であるので，増減表は以下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{t}{\log t}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	(∞)	$\searrow$	$t-t\log\dfrac{t}{\log t}$	$\nearrow$

したがって，$0<x<\dfrac{t}{\log t}$ で単調減少，$\dfrac{t}{\log t}<x$ で単調増加である．

(2) (1) より $t>1$ における $f(x)$ の最小値は $t-t\log\dfrac{t}{\log t}$ である．

$$t\left(1-\log\frac{t}{\log t}\right)\leqq 0$$

$$\iff \log\frac{t}{\log t}\geqq 1\ (\because t>1)$$

$$\iff \frac{t}{\log t}\geqq e$$

$$\iff \frac{\log t}{t}\leqq\frac{1}{e}\cdots①$$

であるので，① を示せばよい．$g(t)=\dfrac{\log t}{t}$ とすると，$g'(t)=\dfrac{1-\log t}{t^2}$ であり，増減表は以下のようになる．

t	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

したがって，$g(t)\leqq\dfrac{1}{e}$ が言えたので題意は示せた． (証明終)

別解

(1) より $f(x)$ は最小値が存在するが，$f(t)=0$ なのでそれは明らかに 0 以下である． (証明終)

(3) (2) の結果から $g(t)$ の最大値は $g(e)$ であるので，

$$g(e)>g(\sqrt{5})$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{\log e}{e} > \frac{\log \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&\iff \sqrt{5}\log e > e \log \sqrt{5} \\
&\iff e^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{e}
\end{aligned}
$$

したがって，$\boldsymbol{e^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{e}}$ である．

(4)

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int_1^t (x\log t - t\log x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\log t - t(x\log x - x)\right]_1^t \\
&= -\frac{1}{2}t^2\log t - \frac{1}{2}\log t + t^2 - t
\end{aligned}
$$

であるので，$F'(t) = -t\log t - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2t} + 2t - 1 = -t\log t + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{1}{2t} - 1$.

したがって，$F'(e) = \boldsymbol{\dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e} - 1}$ である．

講評

$\boxed{1}$ ［小問集合］((1) やや易 (2) 易 (3) やや易 (4) 標準 (5) 標準)

すべて標準的な問題であり，ここでできるだけ得点しておきたい．

$\boxed{2}$ ［数列・平面図形］(易〜やや難)

(1)〜(3)(a) は格子点の問題，(3)(b) が座標の問題である．(1) は図示をして数えるだけの問題であり，易しい．(2)(3) は $x=k$ と $y=k$ のどちらの直線上の格子点を数える方が楽に解けるかを考える必要がある．(3)(b) の I については，角の二等分線の定理を用いる解法，内接円の半径を求める解法などが考えられる．O_1 については，直線 OA と直線 AB が直交していることに気付けば非常に易しい．

$\boxed{3}$ ［数Ⅲ微積分］(標準〜やや難)

序盤は微分して丁寧に計算していくだけである．解説のように (2) と (3) をつなげられるとよいが，(3) 単体でも証明の方針が立つようにはしておきたい．また，(4) の $F(t)$ についてはそのまま t で微分したくなるところであるが，今回は被積分関数 $f(x)$ の中に t が含まれているためそのまま微分はできないので注意が必要である．

各大問とも最後の方が解きにくいが，他は典型的な出題であり，なるべくミスなく処理したい．目標は 60%.

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ 0120-146-156 まで

医学部進学予備校メビオ 0120-146-156 https://www.mebio.co.jp/
医学部専門予備校 YMS ☎03-3370-0410 https://yms.ne.jp/
医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校 0120-192-215 https://www.mebio-eishinkan.com/
登録はこちらから

合格への最後の一歩！ 受講無料
金沢医大 1/30(火) 前日特別講座
18:00〜18:30 ホテルフクラシア大阪ベイ

諦めない受験生をメビオは応援します 参加無料
医学部後期入試ガイダンス 2/4(日)
14:00〜14:30 大阪梅田 ツインタワーズ・ノース

詳しくはWebまたはお電話で

医学部進学予備校メビオ フリーダイヤル 0120-146-156 校舎にて個別説明会も随時開催しています。【受付時間】9:00〜21:00 (土日祝可)
大阪府大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴォア天満橋 天満橋駅(京阪/大阪メトロ谷町線)より徒歩3分