解答速報

福岡大学医学部　数学

2024年2月2日実施

[I]　次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　$\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ とする。$t = \sin\theta\cos\theta$ として $\sin\theta + \cos\theta$ を t の式で表すと $\boxed{\ (1)\ }$ である。また関数 $f(\theta) = \sin^2\theta\cos\theta + \cos^2\theta\sin\theta$ の最大値は $\boxed{\ (2)\ }$ である。

(ii)　$\triangle$ABC において AB $= 3$，CA $= 4$，$\cos\angle$BAC $= \dfrac{1}{4}$ とし，辺 BC を $3:1$ に内分する点を D とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の大きさは $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \boxed{\ (3)\ }$ である。また，辺 BC の中点を M とし，直線 AM 上に点 P をとり，線分 BP の中点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{DN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ が直交するとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{\ (4)\ }$ である。

(iii)　n を 3 以上の自然数とする。箱の中に 1 から n までの番号を 1 つずつ書いた n 枚の札が入っている。この箱の中から同時に 3 枚の札を取り出すとき，取り出した 3 枚の札の番号のうち最小の番号が 3 である確率を P_n とする。このとき P_6 の値は $\boxed{\ (5)\ }$ である。また n の値が変化するとき，P_n の最大値は $\boxed{\ (6)\ }$ である。

解答

(1) $-\sqrt{1+2t}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$　(3) $\dfrac{3\sqrt{19}}{4}$　(4) $\dfrac{45}{62}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$　(5) $\dfrac{3}{20}$　(6) $\dfrac{5}{28}$

解説

(i)　$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，$\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ より $-\sqrt{2} \leqq \sin\theta + \cos\theta \leqq 0 \cdots$① であることに注意しておく．ここで,

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2t$$

であるから，① に注意して $\sin\theta + \cos\theta = \boldsymbol{-\sqrt{1+2t}}$ となる．また,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) \\ &= -t\sqrt{1+2t}\ (= g(t)\ \text{とおく}) \end{aligned}$$

である．$t = \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ において，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq 2\theta \leqq \dfrac{5}{2}\pi$ より $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから，以下では

この範囲で考える．

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\sqrt{1+2t} - \frac{t}{\sqrt{1+2t}} \\ &= -\frac{1+3t}{\sqrt{1+2t}} \end{aligned}$$

より，$g'(t)=0 \iff t=-\dfrac{1}{3}$ であるから，$g(t)$ の増減は以下の通りである．

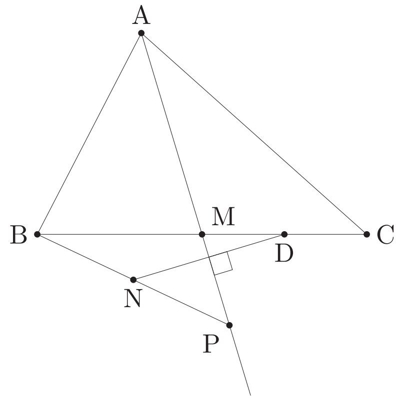
t	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$ である．

注釈

$-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 0$ のときは $g(t) \geqq 0$ であり，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のときは $g(t) \leqq 0$ であるから，最大値は $-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 0$ の区間内でとる．このとき $g(t)=-t\sqrt{1+2t}=\sqrt{t^2(1+2t)}$ となるので，根号内の 3 次関数の増減を調べてもよいだろう．

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおく．このとき $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$,
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BAC}=3\cdot4\cdot\dfrac{1}{4}=3$ である．このとき，



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 &= \left|\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}\right|^2 \\ &= \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{16}(9+18+144) \\ &= \frac{171}{16} \end{aligned}$$

となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{19}}{4}}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}$ （k は実数）とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AN}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(k+2)\vec{a}+\frac{k}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{DN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{1}{4}(k+1)\vec{a}+\frac{1}{4}(k-3)\vec{b} \end{aligned}$$

となる．$\overrightarrow{\mathrm{DN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$ より

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{DN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0 \\ \iff &\left\{\frac{1}{4}(k+1)\vec{a}+\frac{1}{4}(k-3)\vec{b}\right\}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=0 \end{aligned}$$

$$\iff \{(k+1)\overrightarrow{a} + (k-3)\overrightarrow{b}\} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 0$$

$$\iff (k+1)|\overrightarrow{a}|^2 + (2k-2)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + (k-3)|\overrightarrow{b}|^2 = 0$$

$$\iff 9(k+1) + 3(2k-2) + 16(k-3) = 0$$

$$\iff k = \frac{45}{31}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{45}{62}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \boldsymbol{\frac{45}{62}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})}$ である．

(iii)　全ての取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通りであり，取り出した 3 枚の札の番号の最小値が 3 になる取り出し方は，$n \geqq 5$ のとき 3 より大きい $n-3$ 枚から 2 枚を取り出す取り出し方を考えて ${}_{n-3}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ 通りとなるので，

$$P_n = \frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$$

となる．($P_3 = P_4 = 0$ であるから，これは $n = 3,\ 4$ のときも成り立つ)
これより，

$$P_6 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \boldsymbol{\frac{3}{20}}$$

ここで $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{3(n-2)(n-3)}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3(n-3)(n-4)} = \frac{(n-2)^2}{(n+1)(n-4)}$ であり，
以下，$n \geqq 5$ として考えると，

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \iff (n-2)^2 > (n+1)(n-4) \iff n < 8$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 \iff n = 8$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \iff n > 8$$

であり，

$$0 = P_3 = P_4 < P_5 < P_6 < P_7 < P_8 = P_9 > P_{10} > P_{11} > \cdots\cdots$$

となることがわかる．よって $n = 8,\ 9$ のとき P_n は最大値 $\boldsymbol{\frac{5}{28}}$ をとる．

[II] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) k を定数とし，点 P の座標 $(x,\ y)$ が正の数 t の関数として，

$$x = t + \frac{1}{t},\quad y = t^3 + \frac{1}{t^3} + \left(k^2 - k - 7\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

で表されるとする。y を x と k を用いて表すと $y =$ $\boxed{(\ 1\ )}$ である。また点 P が x 軸上の点となるような正の数 t が存在しない k の値の範囲は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(ii) 10 個の値 9, 10, 1, 2, 2, 8, 10, a, $a+3$, b をもつデータがあり，その平均値は 6 である。このとき b を a の式で表すと $b =$ $\boxed{(\ 3\ )}$ である。

さらに a, b が $a \leqq b$ を満たす整数であるとき，このデータの中央値が 7 となるような組 $(a,\ b)$ は全部で $\boxed{(\ 4\ )}$ 個ある。

解答

(1) $x^3 + (k^2 - k - 10)x$ (2) $k < -2,\ 3 < k$ (3) $-2a + 15$ (4) 2

解説

(i)

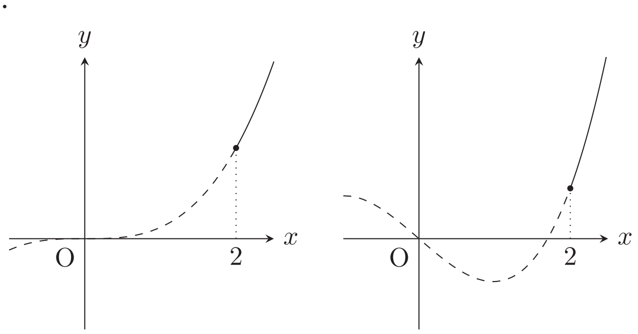
$$x^3 = t^3 + \frac{1}{t^3} + 3\left(t + \frac{1}{t}\right) \iff t^3 + \frac{1}{t^3} = x^3 - 3x$$

なので

$$\begin{aligned} y &= t^3 + \frac{1}{t^3} + \left(k^2 - k - 7\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ &= \left(x^3 - 3x\right) + \left(k^2 - k - 7\right)x \\ &= \boldsymbol{x^3 + \left(k^2 - k - 10\right)x} \quad \left(= f(x) \text{ とおく}\right) \end{aligned}$$

$t > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係より $x = t + \dfrac{1}{t} \geqq 2\sqrt{t \cdot \dfrac{1}{t}} = 2$ $\left(\text{等号は } t = \dfrac{1}{t} \iff t = 1 \text{ のとき}\right)$ である．

したがって点 P が x 軸上の点となるような正の数 t が存在しない k の値の範囲を求めるには $f(x) = 0$ が $x \geqq 2$ に解をもたない範囲を求めればよい．そのためには $f(2) > 0$ が必要であるが，$y = f(x)$ は奇関数であるからグラフより十分である．



よって，

$$\begin{aligned} f(2) = 2(k^2 - k - 6) > 0 &\iff (k+2)(k-3) > 0 \\ &\iff \boldsymbol{k < -2,\ 3 < k} \end{aligned}$$

(ii) $a,\ a+3,\ b$ 以外のデータ 7 個の値を小さい順に並べると，

$$1,\ 2,\ 2,\ 8,\ 9,\ 10,\ 10$$

である．

$$\frac{1+2+2+8+9+10+10+a+(a+3)+b}{10}=6 \iff b=\boldsymbol{-2a+15}$$

となる．

$a \leqq b=-2a+15 \iff a \leqq 5$ である．

① $a=5$ のとき $a+3=8,\ b=-2a+15=5$ なので 10 個のデータは

$$1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 5,\ 8,\ 8,\ 9,\ 10,\ 10$$

であり，中央値は $\dfrac{5+8}{2}=\dfrac{13}{2}\fallingdotseq 7$ となり不適．

② $a=4$ のとき $a+3=7,\ b=-2a+15=7$ なので 10 個のデータは

$$1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 7,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 10$$

であり，中央値は $\dfrac{7+7}{2}=7$ となり適．

③ $a=3$ のとき $a+3=6,\ b=-2a+15=9$ なので 10 個のデータは

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10$$

であり，中央値は $\dfrac{6+8}{2}=7$ となり適．

④ $a \leqq 2$ のとき $a+3 \leqq 5,\ b=-2a+15 \geqq 11$ となる．

10 個のデータのうち小さい 5 個のデータは $1,\ 2,\ 2,\ a,\ a+3$ でありこの中の最大の値は 5 以下である．

10 個のデータのうち大きい 5 個のデータは $8,\ 9,\ 10,\ 10,\ b$ でありこの中の最小の値は 8 である．

したがって中央値は $\dfrac{5+8}{2}=\dfrac{13}{2}$ 以下となり 7 とはならない．

以上より中央値が 7 となる組は $(a,\ b)=(4,\ 7),\ (3,\ 9)$ の **2** 個である．

[III]　(記述問題)

2 つの関数 $f(x)=16\log(x+\sqrt{x^2+16})$，$g(x)=f(x)+x\sqrt{x^2+16}$ について次の問に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(i)　曲線 $C:y=g(x)$ $(x\geqq 0)$ 上の点 $(3,\ g(3))$ における曲線 C の接線の方程式を求めよ。

(ii)　曲線 $y=xf(x)$ $(x\geqq 0)$，直線 $x=3$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

(i)　$f'(x)=\dfrac{16}{x+\sqrt{x^2+16}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)$ より，　$f'(x)=\dfrac{16}{\sqrt{x^2+16}}$ $\cdots$ ① である．

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)+\sqrt{x^2+16}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\\&=\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}+\sqrt{x^2+16}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\\&=2\sqrt{x^2+16}\ \cdots\ ②\end{aligned}$$

である．

$$f(3)=16\log 8=48\log 2,\ g'(3)=10,\ g(3)=f(3)+15=48\log 2+15$$

よって，接線の方程式は，

$$\begin{aligned}y=g'(3)(x-3)+g(3)\iff&\ y=10(x-3)+48\log 2+15\\\iff&\ \boldsymbol{y=10x+48\log 2-15}\end{aligned}$$

である．

(ii)　$x\geqq 0$ のとき，$xf(x)\geqq 0$ であるから，求める面積を S とすると，部分積分を用いることにより

$$\begin{aligned}S&=\int_0^3 xf(x)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^3-\int_0^3\frac{1}{2}x^2f'(x)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^3-8\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx\quad(\because\ ①)\\&=\frac{9}{2}f(3)-8\int_0^3\frac{x^2+16-16}{\sqrt{x^2+16}}dx\\&=\frac{9}{2}f(3)-8\int_0^3\left(\sqrt{x^2+16}-\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx\end{aligned}$$

ここで，①, ② より，

$$\int\sqrt{x^2+16}\,dx=\frac{1}{2}g(x)+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})$$
$$\int\frac{16}{\sqrt{x^2+16}}dx=f(x)+C_2\quad(C_2\text{ は積分定数})$$

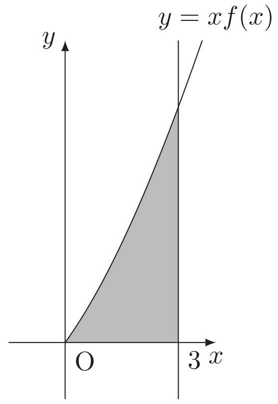
であるから，

$$S=\frac{9}{2}f(3)-8\left[\frac{1}{2}g(x)-f(x)\right]_0^3$$

$$
\begin{aligned}
&= 216\log 2 - 8\left\{\frac{1}{2}g(3) - f(3) - \frac{1}{2}g(0) + f(0)\right\} \\
&= 216\log 2 - 8\left(\frac{48\log 2 + 15}{2} - 48\log 2 - \frac{1}{2}\cdot 32\log 2 + 32\log 2\right) \\
&= \mathbf{280\log 2 - 60}
\end{aligned}
$$

注釈

$y = xf(x)$ のグラフは次のようになり，灰色部分の面積を求めたことになる．



的中!!

直前講習（1 月 23 日）

問題

(i) x の関数 $y = x\sqrt{x^2+2} + 2\log\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ の導関数 y' を求めよ．

(ii) 双曲線 $x^2 - y^2 = -2$ と，放物線 $y = x^2$ とで囲まれる部分を S とする．S の面積を求めよ．

解答

(i)

$$
\begin{aligned}
y' &= \sqrt{x^2+2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} + 2\cdot\frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} \\
&= \sqrt{x^2+2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2}} = 2\sqrt{x^2+2}
\end{aligned}
$$

(ii) (1) から

$$
\int \sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \log\left(x + \sqrt{x^2+2}\right) + C
$$

であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
(\text{面積}) &= 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2+2} - x^2\right) dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+2} + \log\left(x + \sqrt{x^2+2}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{2} + 2\log\left(\sqrt{2} + 1\right)
\end{aligned}
$$

講評

［I］［小問集合］(i) やや難 (ii) 標準 (iii) 標準

(i) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の和と積の関係を利用して，与えられた関数の最大値を求める問題であった．典型問題ではあるが，$t \leqq 0$ に注意する必要があり，処理を誤った受験生は多いかも知れない．

(ii) 平面ベクトルの問題．ベクトルの絶対値や内積の計算をしていくだけであるが，やや面倒であり計算力が問われる．

(iii) 確率（数列）P_n の最大値を求める問題．P_{n+1}/P_n と 1 の大小関係を調べていけばよい．典型問題であり，ここは完答がほしい．

［II］［小問集合］(i) やや難 (ii) やや難

(i) 置き換えにより 3 次関数に持ちこめるタイプの典型題であった．相加平均・相乗平均の関係から x の範囲を絞ることも受験生にとっては手慣れた作業だろう．

(ii) データの分析と整数の融合問題．後半は，適する a, b の組を探していけばよいのだが，うまく絞り込めたかどうかで作業量に大きく差が出るだろう．

［III］［数学Ⅲの微積分］（標準～やや難）

昨年は，三角関数に関する求積問題であったが，本年度は本学頻出の対数関数が題材になった．本問で与えられている関数 $f(x)$ の微分はこれまでに経験している人も多いと思われるため，(i) は正確に微分計算をして完答を狙いたい．(ii) は，面積の立式までは作りたいが，その後の計算は，部分積分法に気づき，(i) で計算した微分を利用して積分計算ができることに気づかないと答えを導くのは困難だろう．

昨年に比べやや解きやすい問題も多いが，全体としての難易度は同程度だろう．[I](ii)(iii) をしっかりとり，残りの小問と [III] はそれぞれの前半は少なくとも押さえた上で，他でどれだけ立ち回れたかの勝負となりそうである．

目標は 60% .

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ