医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS × 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

藤田医科大学（ふじた未来入試）　数学

2023年11月12日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　x を正の実数とするとき，関数 $f(x)=\left(x^2+\dfrac{16}{x^2}\right)^2-2\left(x^2+\dfrac{16}{x^2}\right)+4$ の最小値は $\boxed{アイ}$ であり，そのときの x の値は $\boxed{ウ}$ である。

(2)　3 つの実数 a, b, c からなるデータの平均値が 5，標準偏差が 2 のとき，
$a^2+b^2+c^2=\boxed{エオ}$，$ab+bc+ca=\boxed{カキ}$ である。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4$ となるような $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える。頂点 C から辺 AB に引いた垂線を CP とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$ である。

(4)　整数 x，y が $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8}$，$x>y>0$ を満たすとき，x が最大となる $(x,\ y)$ の組合せは $(\boxed{シス},\ \boxed{セ})$ である。

(5)　$(x+y+xy)^6$ を展開すると，x^2y^4 の係数は $\boxed{ソタ}$ であり x^5y^3 の係数は $\boxed{チツ}$ である。

(6)　$x+y+z<10$ を満たす自然数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は $\boxed{テト}$ 組ある。

(7)　実数 a，b，x，y が $a^2+b^2=49$，$x^2+y^2=36$ を満たすとき，$ax+by$ の最大値は $\boxed{ナニ}$ である。

(8)　自然数 a，b，c に対して $a^3+b^3-a^2b-ab^2-ac^2-bc^2=36$ が成り立つとき，$abc=\boxed{ヌネ}$ である。

(9)　xy 平面上で不等式 $3|x^2-1|+|2y+5|\leqq 9$ の表す領域の面積は $\boxed{ノハ}$ である。

(10)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9}=\frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$ である。

(11)　曲線 $y=x^3$ の接線が点 $(1,\ 81)$ を通るとき，この接線の傾きは $\boxed{ホマ}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	52
ウ	2
エオ	87
カキ	69
$\frac{ク}{ケ}$	$\frac{1}{4}$
コ$\sqrt{サ}$	$2\sqrt{3}$
(シス, セ)	$(72, 9)$

解答記号	正解
ソタ	15
チツ	60
テト	84
ナニ	42
ヌネ	35
ノハ	24
$\frac{ヒフ}{ヘ}$	$\frac{-1}{2}$
ホマ	27

解説

(1)　$t = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$ とおくと，$f(x) = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$.

相加平均・相乗平均の関係より，$t = x^2 + \dfrac{16}{x^2} \geqq 2\sqrt{x^2 \cdot \dfrac{16}{x^2}} = 8$ が成り立つ.

等号成立条件は $x^2 = \dfrac{16}{x^2}$ より $x = 2$ なので，t のとり得る範囲は $t \geqq 8$ である．以上より，$f(x)$ は $t = 8$ で最小値をとり，その値は **52** である．また，そのときの x の値は $x = \mathbf{2}$ である.

(2)　平均値が 5 なので $\dfrac{a+b+c}{3} = 5$ より，$a+b+c = 15$.

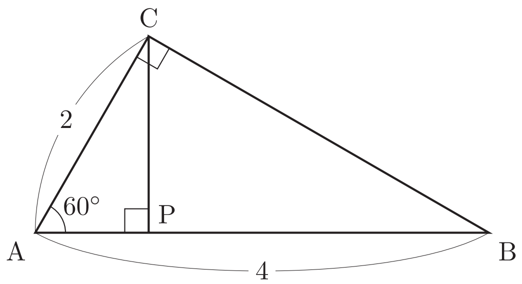
標準偏差が 2 なので $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - 5^2 = 2^2$ より，$a^2+b^2+c^2 = \mathbf{87}$. そして $ab+bc+ca = \dfrac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} = \mathbf{69}$ である.

(3)　$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{4}{4 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ であるので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

また，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \mathbf{2\sqrt{3}}$.



(4)　与式を変形すると,

$$xy - 8x - 8y = 0 \iff (x-8)(y-8) = 64 \cdots ①$$

となる．$x > y > 0$ より $x - 8 > y - 8 > -8$ であることを考慮すると，① を満たす整数 $(x-8,\ y-8)$ の組は

$$(x-8,\ y-8) = (64,\ 1),\ (32,\ 2),\ (16,\ 4)$$

となる．この中で x が最大となる $(x,\ y)$ の組は $(x,\ y) = \mathbf{(72,\ 9)}$ である.

(5)　$(x+y+xy)^6$ の展開式における一般項は

$$\frac{6!}{a!b!c!}x^a y^b (xy)^c = \frac{6!}{a!b!c!}x^{a+c}y^{b+c}$$

と表される（ただし $a,\ b,\ c$ は 0 以上の整数で，$a+b+c = 6$ を満たす）.

まず，x^2y^4 の係数を考える．このとき，$a+c = 2,\ b+c = 4$ となるので，これを解くと $a = 2,\ b = 4,\ c = 0$

となる．したがって，x^2y^4 の係数は $\dfrac{6!}{2!4!} = \mathbf{15}$ となる．

また，x^5y^3 の係数を考える．このとき，先述と同様に考えると $a=3,\ b=1,\ c=2$ となる．したがって，x^5y^3 の係数は $\dfrac{6!}{3!1!2!} = \mathbf{60}$ となる．

(6) $x+y+z<10$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組と，$x+y+z+w=10\cdots$① を満たす自然数 $x,\ y,\ z,\ w$ の組は 1 対 1 に対応する．① を満たす組は，10 個の ○ のすき間に仕切りを 3 本割り込ませると考えて，${}_9\mathrm{C}_3 = \mathbf{84}$.

(7) $\overrightarrow{p} = (a,\ b),\ \overrightarrow{q} = (x,\ y)$ とすると，与条件から $|\overrightarrow{p}| = \sqrt{a^2+b^2} = 7,\ |\overrightarrow{q}| = \sqrt{x^2+y^2} = 6$ であるから，

$$ax+by = \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} \leqq |\overrightarrow{p}||\overrightarrow{q}| = 42$$

が成り立つ．不等号の中の等号が成り立つのは $\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ が同じ向きとなるときであり，そのような $a,\ b,\ x,\ y$ は存在する（座標平面で，原点を中心とする半径 7 と 6 の同心円と，原点を端点とする半直線との交点を考えるとわかりやすいだろう）．したがって，そのとき $ax+by$ は最大値 **42** をとる．

(8) 与式は，

$$(a+b)(a-b+c)(a-b-c) = 2^2\cdot 3^2\cdots①$$

と変形できる．① の左辺の各因数は整数である．$a,\ b,\ c$ が自然数であることなどから以下が成り立つことに注意する．

(i) $a-b+c,\ a-b-c$ の偶奇は一致する．

(ii) $a-b+c > a-b-c$ である．

(iii) $a+b \geqq 2$ である．

(iv) ① の左辺は $a,\ b$ についての対称式だから，$a \geqq b$ としてよい．すると $a-b+c>0$ となるので，これと (iii) から $a-b-c>0$ である．

これら (i)〜(iv) から，考えられる因数の組は次のいずれかに限られる．

	$a+b$	$a-b+c$	$a-b-c$
（ア）	2^2	3^2	1
（イ）	$2^2\cdot 3$	3	1
（ウ）	3	$2\cdot 3$	2

このうち，$a,\ b,\ c$ が自然数になるのは（イ）の場合のみであり，このとき $a=7,\ b=5,\ c=1$ となるので $abc = \mathbf{35}$ である．

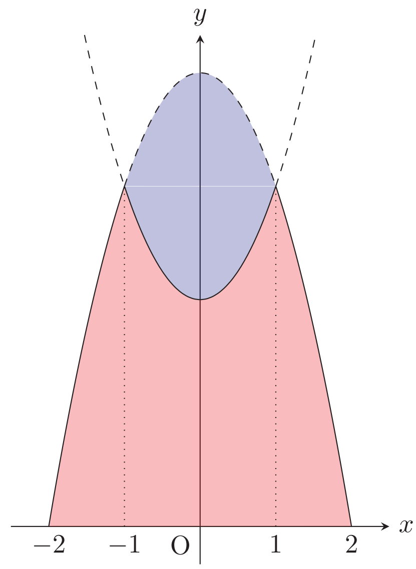
(9)

$$3|x^2-1| + |2y+5| \leqq 9$$
$$\iff \left|y+\frac{5}{2}\right| \leqq \frac{9}{2} - \frac{3}{2}|x^2-1|$$

これを y 軸の正の向きに $\dfrac{5}{2}$ 平行移動すると，

$$|y| \leqq \frac{9}{2} - \frac{3}{2}|x^2-1| = \begin{cases} 6-\dfrac{3}{2}x^2 & (-2\leqq x\leqq -1 \text{ または } 1\leqq x\leqq 2) \\ 3+\dfrac{3}{2}x^2 & (-1<x<1) \end{cases}$$

となる．これが x 軸に関して対称であることより，求める面積は次の図の赤で塗られた領域の面積の 2 倍である．



右図の赤で塗られた領域の面積を S_1，青で塗られた領域の面積を S_2 とすると，

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= \int_{-2}^{2}\left(6-\frac{3}{2}x^2\right)dx \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}(2+2)^3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^{1}\left\{\left(6-\frac{3}{2}x^2\right)-\left(3+\frac{3}{2}x^2\right)\right\}dx \\ &= \frac{3}{6}(1+1)^3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となるので，$S_1=12$ となる．

したがって，求める面積は **24** である．

(10)

$$\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{8\pi}{9}$$

ここで $\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}=-\cos\frac{2\pi}{9}$ となるので，

$$\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9}=-\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{-1}{2}}$$

別解 1

今回の出題範囲から外れるが，数学Ⅲの複素数平面を用いると以下のように考えることもできる．

$\alpha=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ とおくと，α は方程式 $z^9=1$ の虚数解のひとつである．また，

$$z^9-1=(z-1)(z^8+z^7+\cdots+z+1)$$

と因数分解できるので，$\alpha^8+\alpha^7+\cdots+\alpha+1=0$ が成り立つ．

求めたい和を $A=\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9}$ とすると，

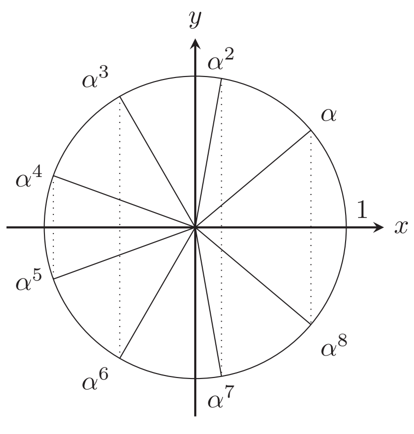
A は $\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ の実部であるが，

これは $\alpha^8+\alpha^7+\alpha^6+\alpha^5$ の実部とも等しい．

また，

$$(\alpha^8+\alpha^7+\cdots+\alpha+1) \text{ の実部} = 0$$

であるから，$2A+1=0$ より $A=\boldsymbol{\frac{-1}{2}}$ である．



別解 2

まず，積→和などを用いた以下の変形に注意しておく．

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right)-\sin\left(k\theta-\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)\right. \\
&\quad + \left(\sin\frac{5\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2}\right) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad \left. + \left(\sin\frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

この式に $n=4,\ \theta=\dfrac{2\pi}{9}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{4}\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2k\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{9\cdot\frac{2\pi}{9}}{2}\right) \\
\iff\ & \sin\frac{\pi}{9}\sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9} \\
\iff\ & \sum_{k=1}^{4}\cos\frac{2k\pi}{9} = \boldsymbol{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}
$$

(11)　$y' = 3x^2$ より，$(t,\ t^3)$ における接線の式は

$$
y = 3t^2(x-t) + t^3 \iff y = 3t^2x - 2t^3
$$

これが $(1,\ 81)$ を通るとき，

$$
81 = 3t^2 - 2t^3 \iff (t+3)(2t^2 - 9t + 27) = 0
$$

この解のうち実数なのは $t=-3$ なので，接線の傾きは $3\cdot(-3)^2 = \mathbf{27}$ である．

問題 2

次の問いに答えよ。

(1)　円周率の定義を述べよ。

(2)　角の大きさについて，弧度法での 1 ラジアンの定義を述べ，それが度数法での $60°$ よりも小さいことを示せ。

(3)　(2) の定義から，半径 r で中心角 θ （ラジアン）の扇形の面積が $\dfrac{1}{2}r^2\theta$ で与えられることを証明せよ。

解答

円の半径を r，円周の長さを l とする．

(1)　（円周率） $= \dfrac{l}{2r}$ である（これを今後 π と書く）．

(2)　長さ r の弧に対する中心角を 1 （ラジアン）と定める．このとき，円周の長さ $l(= 2\pi r)$ に対する中心角について，$360° = 2\pi$（ラジアン） となるので，1（ラジアン） $= \dfrac{180°}{\pi} < 60°$ $(\because \pi > 3)$ である（図 1 参照）．
（証明終）

(3)　円の面積は πr^2 であるから，中心角が θ（ラジアン）の扇形の面積は $\pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ である．　（証明終）

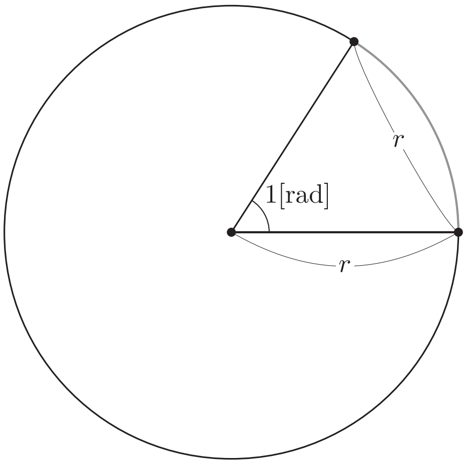


図 1

注釈

$\pi > 3$ であることは，円周の長さが円に内接する正六角形の周の長さよりも大きいことからわかる．

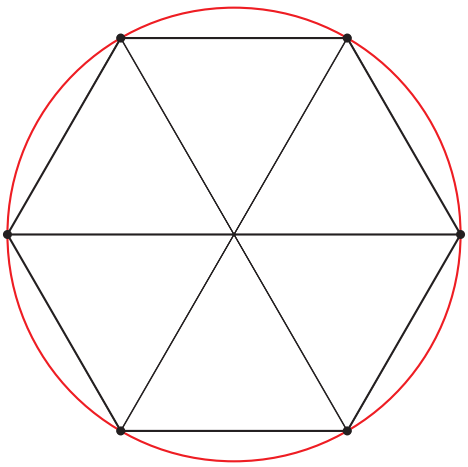


図 2

問題 3

原点を O とする xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q)$ が $p^2+q^2=4$, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ を満たすように動く。線分 PQ の中点を M，直線 OM と x 軸がなす角を θ とし，△PQR が正三角形になるように第 1 象限に点 R をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を θ を用いて表せ。

(2) 線分 OR の長さの最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

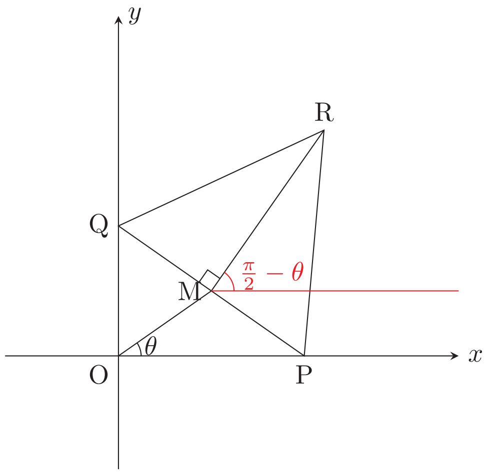
(1) $\mathrm{PQ}=\sqrt{p^2+q^2}=2$, $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，△POQ は M を中心とする半径 1 の円に内接する．したがって OM $=1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ である．また，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ が x 軸の正の部分とのなす角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ であり，△PQR は 1 辺の長さが 2 の正三角形であることから MR $=\sqrt{3}$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MR}}&=\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)\\&=(\sqrt{3}\sin\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta)\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}\\&=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\end{aligned}$$

である．これより $\mathbf{R}(\boldsymbol{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta})$ である．



$\boxed{\text{別解 1}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より $p=2\cos\theta$, $q=2\sin\theta$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-p,\ q)=(-2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ であるので，PQ の法線ベクトルのひとつは $\overrightarrow{n}=(\sin\theta,\ \cos\theta)$ である．

△PQR は正三角形であるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{n}\\&=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\end{aligned}$$

であるから，$\mathbf{R}(\boldsymbol{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta})$ である．

別解 2

複素数平面において，P(α)，Q(β)，R(γ) とすると，$\alpha = p = 2\cos\theta$，$\beta = qi = 2i\sin\theta$ であり，

$$\begin{aligned} \gamma - \beta &= (\alpha - \beta)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ \iff \gamma &= (2\cos\theta - 2i\sin\theta)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2i\sin\theta \\ &= \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta + i(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) \end{aligned}$$

であるから，$\mathbf{R(\cos\boldsymbol{\theta} + \sqrt{3}\sin\boldsymbol{\theta},\ \sin\boldsymbol{\theta} + \sqrt{3}\cos\boldsymbol{\theta})}$ である．

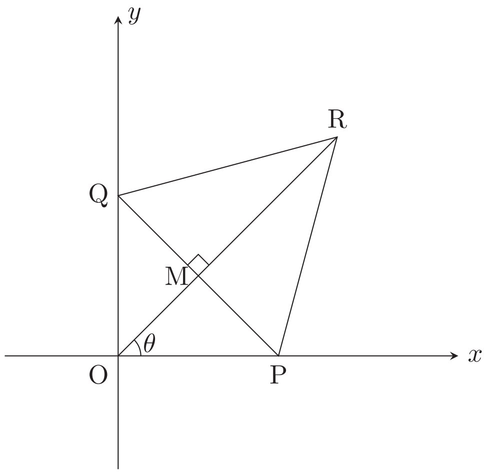
(2)

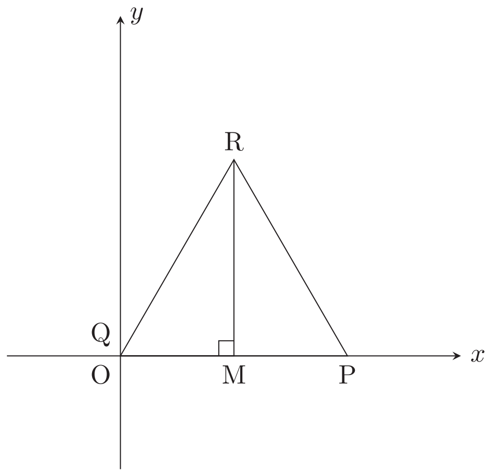
$$\begin{aligned} \mathrm{OR} &= \sqrt{(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}\sin 2\theta} \end{aligned}$$

である．ここで，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ であるから，OR の長さは $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3} + 1}$ をとり，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{4} = \mathbf{2}$ をとる．

注釈

OM $= 1$，MR $= \sqrt{3}$ で一定なので，3 点 O，M，R が一直線上に並ぶとき OR の長さが最大になり，$\angle\mathrm{OMR} = \min\left\{2\theta + \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi - 2\theta\right\}$ の大きさが最も小さくなるとき OR の長さが最小になる（下図参照）.





講評

問題 1［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) 易 (4) 易 (5) 標準 (6) 標準 (7) やや難 (8) やや難 (9) やや難 (10) やや難 (11) 易)

(1)〜(4) と (11) は易しく，落とせない．(5)〜(10) は難易度が上がり，差がついたと思われるが，(8)(9)(10) は正解率が低そうである．

(6) は，解説のように文字 w を加えて考えるとよいが，$x+y+z=3,\ 4,\ \cdots,\ 9$ のそれぞれについて考えてもさほど面倒ではない．(7) はコーシー・シュワルツの不等式についての経験の有無で大きく差がつく．(9) は，与式に対してまともに場合分けすると大変なので，解説のように y 方向に平行移動するとよい．

問題 2［円周率と弧度法についての証明問題］（標準）

弧度法の定義については，普段あまり意識しておらず意表をつかれた受験生が多かったと思われる．この大問で大きく差がついた可能性がある．

問題 3［三角関数］（標準）

(1) はいろいろな方法が考えられるが，与えられた情報から R の座標を表すのはやや難しかったかもしれない．ここを乗り切ることができれば (2) は容易であり，受験生によって大きく差がついたかもしれない．

小問集合は昨年度に引き続き難易度の差が激しかった．とるべき問題を見極める力が必要である．また，大問では円周率の定義，ラジアンの定義など普段受験生が意識せずに使っているものについて説明を求める出題が目新しかった．教科書を基本からしっかり理解して積み上げているかどうかを見極めたい，という大学側の意識も伺える．小問集合をなるべく取りこぼしなく乗り切った上で，問題 2 と問題 3 の (1) でどれだけ立ち回れたか，が合否を分けそうである．1 次合格のための目標点は 65%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ