解答速報

大阪医科薬科大学（後期）　数学

2024年3月10日実施

〔1〕 以下の問いに答えよ。

設問 (1) i ）と (2) i ）は，結果のみを解答せよ。設問 (1) ii ）と (2) ii ）は，途中の式，考え方も記述せよ。

(1) 30 人の学生がテストを受け，2 人が満点を取ったとする。この 30 人から n 人を選んだとき，満点を取った学生が含まれている確率を $P(n)$ とする。ただし，n は 28 以下の自然数とする。

i ） $P(5)$ を求めよ。

ii ） $P(n) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすような n のうち最小のものを求めよ。

(2) 複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1+2i)$，$\mathrm{B}(5)$，$\mathrm{C}(z)$ がある。ただし，i は虚数単位である。

i ） 三角形 ABC が正三角形となるように z を定めよ。ただし，反時計回りの順に，点 A，点 B，点 C が並んでいるものとする。

ii ） 点 $\mathrm{C}(z)$ が $\dfrac{z-1-2i}{z-5}+\dfrac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0$ を満たしながら動くとき，$|z|$ の最大値を求めよ。

解答

(1) 30 人から n 人を選んだとき，満点を取った学生が含まれている確率は，余事象を考えて

$$P(n)=1-\frac{{}_{28}\mathrm{C}_n}{{}_{30}\mathrm{C}_n}=1-\frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot 29}$$

である．

i ） $P(5)=1-\dfrac{25\cdot 24}{30\cdot 29}=\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{29}}$.

ii ）

$$\begin{aligned}
&P(n) \geqq \frac{1}{2}\\
\iff& 1-\frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot 29} \geqq \frac{1}{2}\\
\iff& \frac{(30-n)(29-n)}{30\cdot 29} \leqq \frac{1}{2}\\
\iff& (30-n)(29-n) \leqq 435
\end{aligned}$$

である．ここで，$f(n)=(30-n)(29-n)=(n-29)(n-30)$ $(1 \leqq n \leqq 28)$ とおくと，$f(n)$ は n に関して単調減少であり，

$$f(8)=462>435$$
$$f(9)=420 \leqq 435$$

であるから，$P(n) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすような n のうち最小のものは $n=\mathbf{9}$ である．

(2) $\alpha=1+2i$，$\beta=5$ とおく．

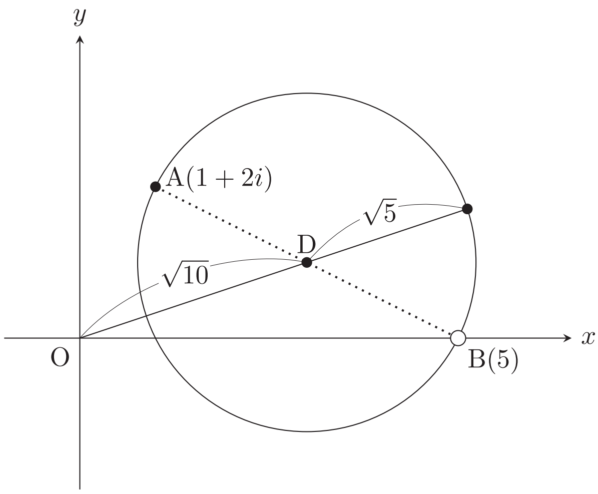
i ） 点 A(α) を中心として，点 B(β) を反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点が C(z) であるから，

$$
\begin{aligned}
& z-\alpha=(\beta-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & z-(1+2i)=(4-2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\Longleftrightarrow\ & z=\boldsymbol{3+\sqrt{3}+(2\sqrt{3}+1)i}
\end{aligned}
$$

ii ）

$$
\begin{aligned}
& \frac{z-1-2i}{z-5}+\frac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{z-\alpha}{z-\beta}+\overline{\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)}=0
\end{aligned}
$$

であるから，これは $\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数または $z=\alpha$ であることを意味する．$\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数のときは AC $\perp$ BC が成り立つことから，点 C は線分 AB を直径とする円周上を動く．また，点 C が点 A と一致するとき点 C は明らかにこの円周上の点である．以上により，点 C が描く図形は線分 AB を直径とする円（ただし，点 B を除く）である．この円の中心を D($3+i$) とすると， OD $=\sqrt{10}$ であり，半径は $\sqrt{5}$ であるから，求める $|z|$ の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$ である．



別解

点 C の軌跡については，$z \neq 5$ の条件の下で，

$$
\begin{aligned}
& \frac{z-1-2i}{z-5}+\frac{\overline{z}-1+2i}{\overline{z}-5}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & (z-1-2i)(\overline{z}-5)+(\overline{z}-1+2i)(z-5)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & z\overline{z}-(3-i)z-(3+i)\overline{z}+5=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \{z-(3+i)\}\{\overline{z}-(3-i)\}=5 \\
\Longleftrightarrow\ & |z-(3+i)|=\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

として求めてもよいだろう．

的中!!

大阪医科薬科大学後期 テストゼミ・直前テキスト

方程式 $z^3 = 1$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする。複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，次の問いに答えよ。

(中略)

(3) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，α が $\dfrac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} = ri$ $(r > 0)$ をみたすとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの r と α を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

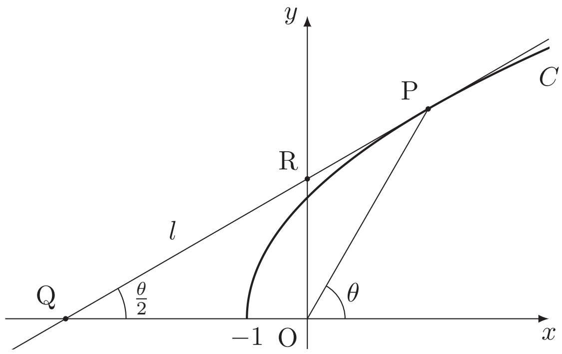
〔2〕 O を原点とする座標平面上において，O を極，x 軸の正の方向を始線とする極座標を定め，極方程式 $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ で表される曲線を C とする。$0<\theta<\pi$ とし，極座標が $(r,\ \theta)$ で表される C 上の点を P，点 P における C の接線を l，l と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ Q，R とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l の傾きを θ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{OQR}$ を θ を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}^2}$ を求めよ。

解答



極方程式 $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}(>0)$ を直交座標に関する方程式に直すと次のようになる．ただし，$0<\theta<\pi$ より $y>0$ である．

$$
\begin{aligned}
&r=\frac{2}{1-\cos\theta}\\
\iff\ &r-r\cos\theta=2\\
\iff\ &\sqrt{x^2+y^2}=x+2\\
\iff\ &x^2+y^2=x^2+4x+4 \text{ かつ } x\geqq -2\\
\iff\ &x=-1+\frac{y^2}{4}
\end{aligned}
$$

(1) 上の結果により $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y}{2}$ つまり $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ である．したがって $(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における l の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{r\sin\theta}=\boldsymbol{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}$$

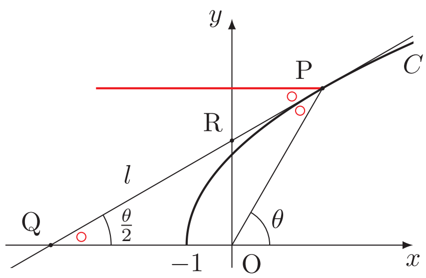
(2) (1) の結果をさらに整理すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$\angle\mathrm{OQR}$ は l と x 軸のなす角だから $\boldsymbol{\angle\mathrm{OQR}=\dfrac{\theta}{2}}$ である．

注釈

ここで，原点 O は放物線 C の焦点である．右図のように，P を端点とし x 軸に平行な半直線を P の左側にとると，その半直線と線分 OP がなす角は θ であり，放物線の性質から直線 l はその角を二等分する．これより $\angle\mathrm{OPR} = \angle\mathrm{OQR} = \dfrac{\theta}{2}$ がわかる．



(3)　(2) より $\triangle\mathrm{OPQ}$ は O を頂角とする二等辺三角形であることがわかる．したがって

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OP} = r = \frac{2}{1-\cos\theta} = \frac{2}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$$

また

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OQ}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$$

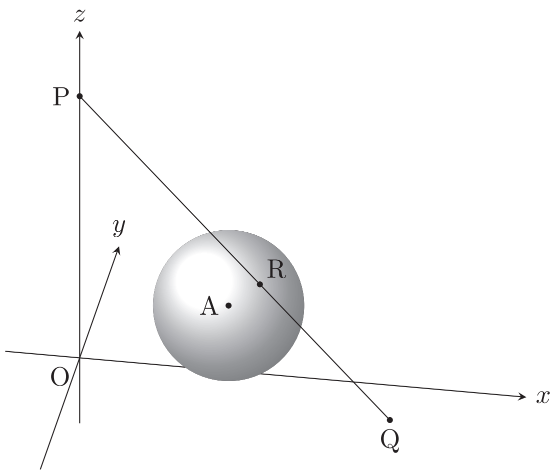
したがって $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}^2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$ となり，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}^2} = \mathbf{1}$ がわかる．

〔3〕 O を原点とする座標空間に点 A $(2,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S がある。2 点 P $(0,\ 0,\ 4)$, Q $(x,\ y,\ 0)$ を通る直線が S と点 R で接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{APR} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(2) xy 平面上で Q 全体が描く図形の方程式を求めよ。

解答



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (2,\ 0,\ -3)$ であるので，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = \sqrt{2^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$.

また，AR は球の半径であるので，$\mathrm{AR} = 1$.

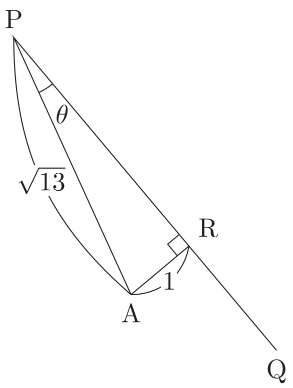
したがって，$\mathrm{PR} = \sqrt{\mathrm{PA}^2 - \mathrm{AR}^2} = 2\sqrt{3}$.

以上より，

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PA}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{39}}{13}}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \sqrt{13}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\theta = \mathbf{12}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (2,\ 0,\ -3)$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (x,\ y,\ -4)$ であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta$$

に代入することにより

$$2x + 12 = \sqrt{13}\cdot\sqrt{x^2+y^2+16}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$x + 6 = \sqrt{3x^2+3y^2+48}$$

$x \geqq -6$ における範囲で両辺 2 乗して，

$$
\begin{aligned}
&x^2 + 12x + 36 = 3x^2 + 3y^2 + 48 \\
\Longleftrightarrow\ &2x^2 + 3y^2 - 12x + 12 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &2(x-3)^2 + 3y^2 = 6 \\
\Longleftrightarrow\ &\boldsymbol{\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1}
\end{aligned}
$$

(これは $x \geqq -6$ を満たす)

〔4〕 n を自然数とする。$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) I_1, I_2 を求めよ。

(2) $I_n < \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\tan x)^n (1 - \tan^2 x) dx$ を求めよ。

解答

(1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \Big[-\log|\cos x| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2} \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \Big[-x + \tan x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{1 - \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(2) $y = \tan x$ のグラフは $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において下に凸であり，このグラフ上の 2 点 $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$ を結ぶ直線の方程式は $y = \dfrac{4}{\pi}x$ である．したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において $\tan x \leqq \dfrac{4}{\pi}x$ が成り立ち，等号が成り立つのは $x = 0,\ \dfrac{\pi}{4}$ のときのみであるから，

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx &< \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}x \right)^n dx \\ &= \left(\frac{4}{\pi} \right)^n \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{4}{\pi} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} \\ &= \frac{\pi}{4(n+1)} \end{aligned}$$

となる．したがって，$I_n < \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ が成り立つ．　（証明終）

(3) 題意の無限級数において，$n = N$ までの部分和は

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\tan x)^n (1 - \tan^2 x) dx \\ =\ &\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x - \tan^{n+2} x \right) dx \\ =\ &\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \left(I_n - I_{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(I_1 - I_3) + (I_2 - I_4) - (I_3 - I_5) + (I_4 - I_6) \\
&\qquad - \cdots\cdots + (-1)^{N-1}(I_{N-1} - I_{N+1}) + (-1)^N(I_N - I_{N+2}) \\
&= -I_1 + I_2 - (-1)^{N-1}I_{N+1} - (-1)^N I_{N+2}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $0 < I_n < \dfrac{\pi}{4(n+1)}$ が成り立ち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4(n+1)} = 0$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ である．したがって，上の部分和において $\displaystyle\lim_{N\to\infty} I_{N+1} = 0$，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} I_{N+2} = 0$ が成り立つので，求める極限は

$$
-I_1 + I_2 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}\log 2 + 1 - \frac{\pi}{4}}
$$

である．

講評

〔1〕［確率・複素数平面］（標準）

大阪医科薬科大学では珍しい，中問 2 題という構成であった．(1) の $P(n)$ については余事象の確率を考えてしっかりと得点しておきたい．(2) の複素数もよくあるタイプの問題である．(ii) については定石通り展開して z についての方程式を作ってもよいが，解説のように純虚数条件から線分 AB が円の直径になっていることに気づけると楽である．

〔2〕［極方程式・極限］（やや難）

極方程式は基本的に直交座標に関する方程式に直すとよい．$\angle$OQR については，(1) の流れから $\tan\angle$OQR を考えるのが自然だが，放物線の性質を利用して図形的に処理してもよい．極方程式という題材には少し戸惑った受験生もいたかもしれない．

〔3〕［空間座標］（標準）

球面と直線に関する問題．(1) の計算は落とせない．(2) も一見難しそうに見えるが単純に内積計算をするだけであるので極力得点しておきたい問題であった．点光源による球の射影の問題を解いた経験があった受験生にとっては取り組みやすかったであろう．

〔4〕［数学Ⅲの積分・極限］（やや難）

有名な $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ を題材とする問題であった．(1) の計算は落とせない．(2) の証明で方針に困った受験生は多かったかもしれないが，(3) は (2) の結果を認めてなるべく解き進めておきたい．

昨年度まで 100 分で大問 5 題の出題が続いていたが，今年度は前期・後期ともに 90 分で大問 4 題の出題となった．また，〔1〕に関しては中問 2 題構成となるなどやや変化が見られた．〔1〕，〔3〕はなるべく完答に近いところまで仕上げたい．〔2〕，〔4〕でどれだけ立ち回れたかの勝負となりそうだが，この 2 問については，後半で手詰まりとなった受験生も多いであろう．1 次合格の目標は 60%．

解答・講評作成 医学部進学予備校メビオ