解答速報

東海大学医学部　数学

2023年 2月　3日実施

1 (1)　連立不等式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(4x+1) < 3+x \\ 3x+1 \geqq x \end{cases}$$

を満たす整数 x は，全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個ある．

(2)　$9\log_a b + \log_b a = 6$ のとき，$\log_{a^2} b + \log_{b^2} a$ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3)　円 $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 8 = 0$ に接し，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ である直線の方程式は，$y = -\dfrac{1}{2}x + \boxed{\text{ウ}}$ と，$y = -\dfrac{1}{2}x + \boxed{\text{エ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{ウ}} < \boxed{\text{エ}}$ とする．

(4)　$-3 \leqq x \leqq \sqrt{3}$ において，関数 $y = -x^3 + 3x$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5)　$\displaystyle\int_0^4 |x^2 - 4x + 3|dx = \boxed{\text{キ}}$

(6)　$\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\tan^3 x + \dfrac{1}{\tan^3 x} = \boxed{\text{ク}}$ である．

(7)　1 辺の長さが 3 である正八面体に 6 点で外接する球の半径は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，8 点で内接する球の半径は $\boxed{\text{コ}}$ である．

解答

ア．3　イ．$\dfrac{5}{3}$　ウ．1　エ．6　オ．18　カ．-2　キ．4　ク．$-\dfrac{296}{27}$　ケ．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　コ．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{2}(4x+1) < 3+x$ を解くと，$x < \dfrac{5}{2}$ であり，$3x+1 \geqq x$ を解くと，$x \geqq -\dfrac{1}{2}$ であるから，これらの共通部分を求めると，$-\dfrac{1}{2} \leqq x < \dfrac{5}{2}$ である．これを満たす整数は，$x = 0,\ 1,\ 2$ の **3** 個ある．

(2)　底の条件と真数条件より，$a > 0,\ a \fallingdotseq 1,\ b > 0,\ b \fallingdotseq 1$ である．$\log_a b = x$ とおくと，$x \fallingdotseq 0$ であり，

$$\begin{aligned} 9\log_a b + \log_b a = 6 &\iff 9x + \frac{1}{x} = 6 \\ &\iff 9x^2 - 6x + 1 = 0 \\ &\iff (3x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

を得るので，$x=\dfrac{1}{3}$ となる．

$$\begin{aligned}\log_{a^2} b+\log_{b^2} a &= \frac{1}{2}\log_a b+\frac{1}{2}\log_b a\\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+3\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

(3)　与式は，$(x-3)^2+(y-2)^2=5$ と変形できるので，中心 $(3,\ 2)$，半径 $\sqrt{5}$ の円である．求める直線を $y=-\dfrac{1}{2}x+b$ とおくと，この直線が円と接するためには，直線 $x+2y-2b=0$ と円の中心 $(3,\ 2)$ の距離が円の半径 $\sqrt{5}$ と等しければよいので，

$$\begin{aligned}\frac{|3+2\cdot 2-2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5} &\iff |2b-7|=5\\ &\iff 2b-7=\pm 5\end{aligned}$$

よって，$b=1,\ 6$ を得るので，求める方程式は，$y=-\dfrac{1}{2}x+\mathbf{1}$，$y=-\dfrac{1}{2}x+\mathbf{6}$ である．

(4)　$f(x)=-x^3+3x$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+3$ であるから，$f'(x)=0$ のとき，$x=\pm 1$ である．よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	18	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

よって，最大値 **18**，最小値 $\mathbf{-2}$ である．

(5)　$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ であるから，

$$(\text{与式})=\int_0^1 (x^2-4x+3)dx+\int_1^3(-x^2+4x-3)dx+\int_3^4(x^2-4x+3)dx$$

となる．$y=x^2-4x+3$ のグラフは $x=2$ に関して対称であることから，$\displaystyle\int_0^1(x^2-4x+3)dx=\int_3^4(x^2-4x+3)dx$ であることを利用すると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 2\int_0^1(x^2-4x+3)dx+\int_1^3(-x^2+4x-3)dx\\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1+\frac{1}{6}(3-1)^3\\ &= 2\left(\frac{1}{3}-2+3\right)+\frac{4}{3}\\ &= \mathbf{4}\end{aligned}$$

(6)　$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると，

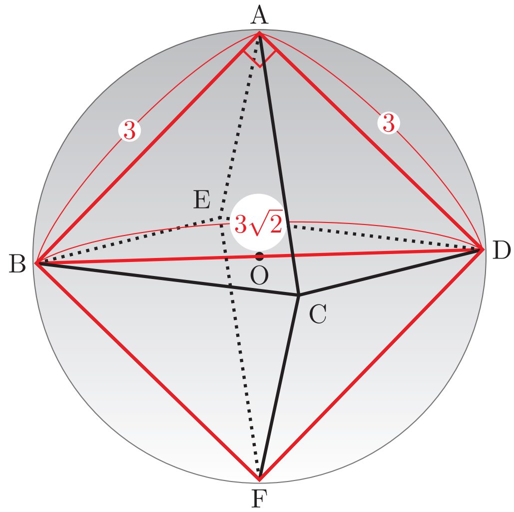
$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{4}\iff \sin x\cos x=-\frac{3}{8}$$

このとき，$\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=-\dfrac{8}{3}$ となるので，

$$(\text{与式})=\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^3-3\tan x\cdot\frac{1}{\tan x}\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)=\left(-\frac{8}{3}\right)^3-3\left(-\frac{8}{3}\right)=-\mathbf{\frac{296}{27}}$$

(7) 図のように正八面体の頂点を設定する．BE の中点を M，CD の中点を N とおく．

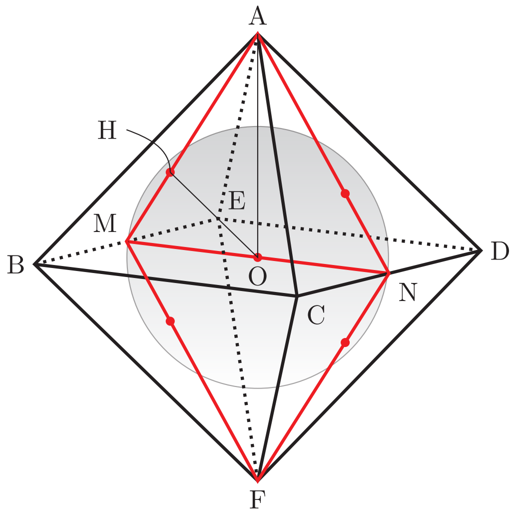
球が正八面体に 6 点で外接するとき，A，B，F，D の 4 点を通る平面で切断してできる面に円が外接する図を考えることにより，外接球の半径は $\dfrac{\mathrm{BD}}{2}=\mathbf{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ とわかる．

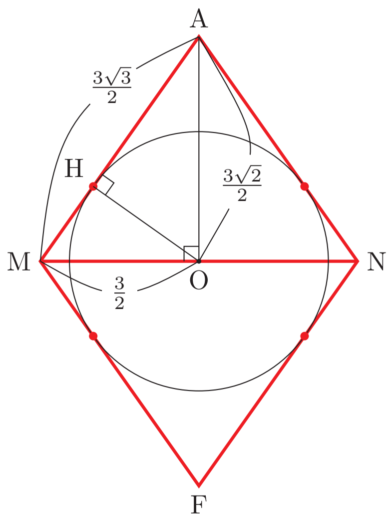


球が正八面体に 8 点で内接するとき，A，M，F，N の 4 点を通る平面で切断してできる面に円が内接する図を考える．O から AM に下ろした垂線の足を H とおくと，△OAM の面積を 2 通りで表すことにより，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OM}\iff\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{2}\iff\mathrm{OH}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

したがって，内接球の半径は $\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$ である．





別解

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OE}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{BOE}=90^\circ$ であるから，$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ とおくことができる．よって，3 点 A，B，E を通る平面の方程式は，$x+y+z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ であり，この平面と点 O の距離が内接球の半径であるから，内接球の半径を r とすると，点と平面の距離の公式より，

$$r=\frac{\left|0+0+0-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$\boxed{2}$ xy 平面上で，次の 3 つの円を考える．

C_1 : 中心が第 2 象限にあり，x 軸と点 $(-1,\ 0)$ で接する半径 a の円

C_2 : 中心が第 1 象限にあり，x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接する半径 b の円

C_3 : 中心が点 $(0,\ c)$ で，2 点 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$ を通る円

(1) $a=2,\ b=1$ のとき，C_1 と C_2 の交点の座標は，($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) と ($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$) である．ただし，$\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{ウ}}$ とする．

(2) C_1 と C_2 が異なる 2 点 P, Q で交わるとき，原点 O との距離の積 $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) C_1 と C_2 が接するとき，b は a を用いて表すと，$b=\boxed{\text{カ}}$ である．

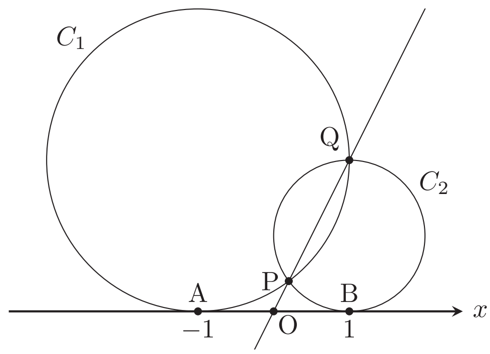
(4) C_3 が点 $(-1,\ 2)$ を通るとき，$c=\boxed{\text{キ}}$ である．

(5) s を実数，t を正の実数とする．C_1，C_2，C_3 が共に点 $\mathrm{R}(s,\ t)$ を通るとき，a は s, t を用いて表すと，$a=\boxed{\text{ク}}$ である．また，積 ab の値を c のみで表すと，$ab=\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{1}{5}$　イ．$\dfrac{2}{5}$　ウ．1　エ．2　オ．1　カ．$\dfrac{1}{a}$　キ．1　ク．$\dfrac{(s+1)^2+t^2}{2t}$　ケ．c^2+1

解説



$\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$ とし，円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ O', O'' とする．

円 C_1，C_2，C_3 の方程式はそれぞれ

$$C_1 : (x+1)^2+(y-a)^2=a^2$$

$$C_2 : (x-1)^2+(y-b)^2=b^2$$

$$C_3 : x^2+(y-c)^2=c^2+1$$

である．

また，C_1 と C_2 の辺々を引くと

$$(x+1)^2+(y-a)^2-a^2-\{(x-1)^2+(y-b)^2-b^2\}=0 \iff 2x-(a-b)y=0 \cdots ①$$

という 1 次式が得られる．C_1 と C_2 が 2 交点をもつ場合，この 1 次式が 2 つの円の交点を通る直線となる．

(1) $a=2,\ b=1$ のとき ① の $y=2x$ と円 C_1 との交点を考えると，

$(x+1)^2+(2x-2)^2=4 \iff 5x^2-6x+1=0$ から $x=\dfrac{1}{5}$, 1 を得るので，これらは異なる 2 点で交わっていることがわかり，これが 2 円の交点である．よって求める座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}\right)$，$(\mathbf{1},\ \mathbf{2})$ である．

(2) ① より直線 PQ は原点 O を通ることがわかるので，円 C_1 に対して方べきの定理を用いると，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}^2=\mathbf{1}$$

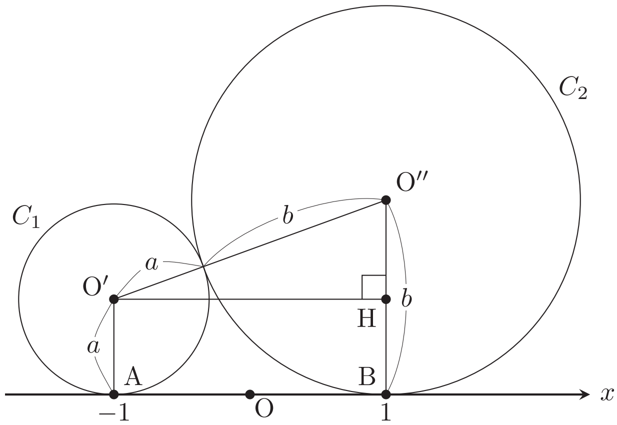
(3)　C_1 と C_2 が内接することはないので外接する場合のみ考えればよい．O$'$ から直線 BO$''$ に垂線 O$'$H を引くと，

$$\mathrm{O'O''} = a + b,\ \mathrm{O'H} = 2,\ \mathrm{O''H} = |a - b|$$

であるので，三平方の定理より

$$(a + b)^2 = 2^2 + |a - b|^2 \iff ab = 1$$

$a > 0$ であるので，$b = \boldsymbol{\frac{1}{a}}$ である．



(図は $a < b$ の場合であるが，$a \geqq b$ の場合も同様に成り立つ．)

(4)　C_3 に $(-1,\ 2)$ を代入することにより $(-1)^2 + (2 - c)^2 = c^2 + 1 \iff -4c + 4 = 0$ から $c = \mathbf{1}$.

(5)　$C_1,\ C_2,\ C_3$ にそれぞれ $(s,\ t)$ を代入すると，

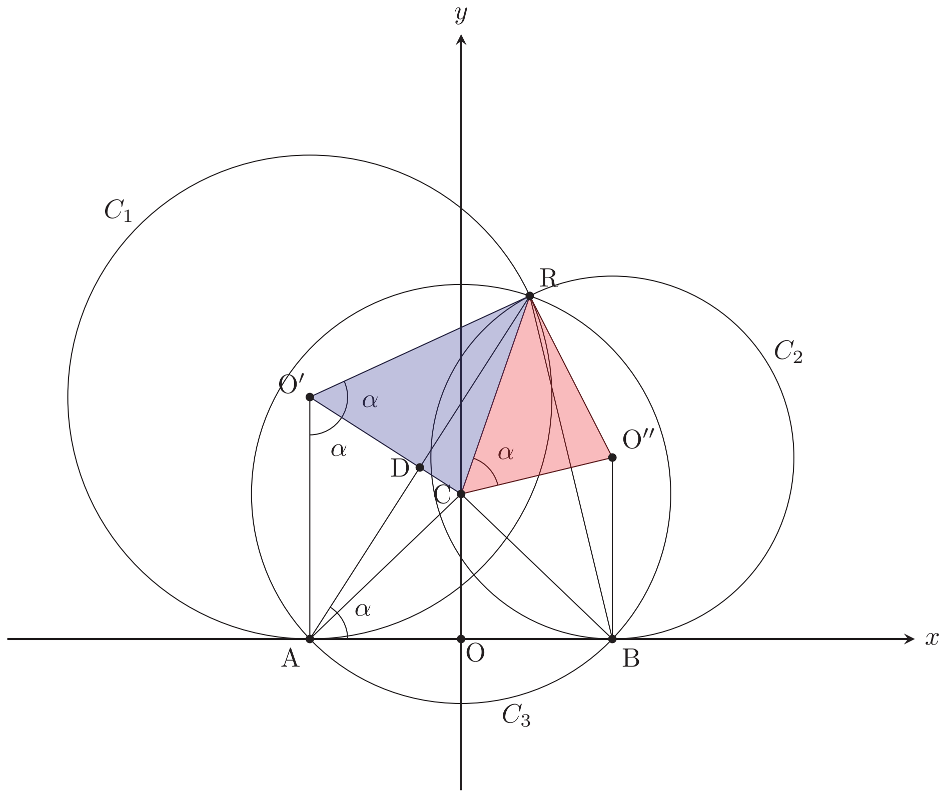
$$(s + 1)^2 + (t - a)^2 = a^2 \iff (s + 1)^2 + t^2 - 2ta = 0 \cdots ②$$
$$(s - 1)^2 + (t - b)^2 = b^2 \iff (s - 1)^2 + t^2 - 2tb = 0 \cdots ③$$
$$s^2 + (t - c)^2 = c^2 + 1 \iff s^2 + t^2 - 1 - 2tc = 0 \cdots ④$$

となるので，②より $t > 0$ であることから $a = \boldsymbol{\frac{(s+1)^2 + t^2}{2t}} \cdots ⑤$ である．

同様に，③より $b = \frac{(s-1)^2 + t^2}{2t} \cdots ⑥$ を得る．ここで，⑤, ⑥ に④の結果 $(s^2 + t^2 = 1 + 2tc)$ を代入すると，$a = \frac{tc + s + 1}{t}$，$b = \frac{tc - s + 1}{t}$ を得るので，

$$\begin{aligned} ab &= \frac{(tc + 1)^2 - s^2}{t^2} \\ &= \frac{t^2c^2 + 2tc + 1 - (1 + 2tc - t^2)}{t^2} \\ &= \frac{t^2c^2 + t^2}{t^2} \\ &= \boldsymbol{c^2 + 1} \end{aligned}$$

別解



$\angle \mathrm{BAR} = \alpha$ とすると，円 C_3 において，円周角と中心角の関係より，

$$\angle \mathrm{BCR} = 2\angle \mathrm{BAR} = 2\alpha$$

より

$$\angle \mathrm{BCO''} = \angle \mathrm{RCO''} = \alpha$$

でなければならない．

一方 $\angle \mathrm{O'AD} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ より，$\angle \mathrm{DO'A} = \angle \mathrm{DO'R} = \alpha$ であるから，$\angle \mathrm{RO'C} = \angle \mathrm{RCO''}$ が成り立つ．

$\angle \mathrm{RCO'} = \angle \mathrm{RO''C}$ も同様に示せるので．$\triangle \mathrm{RCO'} \backsim \triangle \mathrm{RO''C}$ が成り立つ．したがって

$$\mathrm{RO'} : \mathrm{RC} = \mathrm{RC} : \mathrm{RO''} \quad \text{つまり} \quad a : \sqrt{c^2+1} = \sqrt{c^2+1} : b$$

が成り立つので，$ab = \boldsymbol{c^2+1}$ である．

3 自然数 1，2，3，…を下の図のように表に並べていく．

1	2	4	7	11	
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					

表の横の並びを行と呼び，上から順に 1 行目，2 行目，3 行目，…と呼ぶ．表の縦の並びを列と呼び，左から順に 1 列目，2 列目，3 列目，…と呼ぶ．例えば，表の 2 行目は 3，5，8，…であり，表の 3 列目は 4，8，13，…である．i，j を自然数として，i 行目 j 列目にある数を $(i,\ j)$ 成分と呼ぶ．例えば，$(3,\ 2)$ 成分は 9 である．上の表は，$(1,\ 1)$ 成分を 1 として，以下の規則で自然数を並べている．

(i) $(i,\ 1)$ 成分が k ならば，$(1,\ i+1)$ 成分は $k+1$ である．

(ii) $(i,\ j)$ 成分（$j \fallingdotseq 1$）が k ならば，$(i+1,\ j-1)$ 成分は $k+1$ である．

(1) $(20,\ 1)$ 成分は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$(20,\ 20)$ 成分は $\boxed{\text{イ}}$ である．また，$(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}})$ 成分は 200 である．

(2) n を自然数とする．$(1,\ n)$ 成分は $\boxed{\text{オ}}$ であり，$(n,\ n)$ 成分は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3) n を自然数とする．表の 1 行目から n 行目のうち，1 列目から n 列目を取り出す．その中に含まれる数のうち，奇数の個数を $a(n)$ とおく．

例えば，$n=3$ であれば，

1	2	4
3	5	8
6	9	13

の中の奇数の個数であるから，$a(3)=5$ となる．$a(20)$ は $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答

ア． 210　イ． 761　ウ． 10　エ． 11　オ． $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$　カ． $2n^2-2n+1$　キ． 200

解説

以下，$(i,\ j)$ 成分の値を $x(i,\ j)$ と記す．

$1 \to$	1	2	4	7	11	
$1+2 \to$	3	5	8	12		
$1+2+3 \to$	6	9	13			
$1+2+3+4 \to$	10	14				
$1+2+3+4+5 \to$	15					

上図より，

$$x(m, 1) = 1+2+\cdots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$$

である．また，

$$\begin{aligned} x(1,m+1) &= x(m,\ 1)+1 \\ x(2,m) &= x(m,\ 1)+2 \\ x(3,m-1) &= x(m,\ 1)+3 \\ &\vdots \\ x(i,m+2-i) &= x(m,\ 1)+i \\ &\vdots \end{aligned}$$

より，

$$x(i,\ j)=x(i+j-2,1)+i=\frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)+i$$

である．

(1)

$$x(20,\ 1)=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=\mathbf{210}$$
$$x(20,\ 20)=\frac{1}{2}\cdot 38\cdot 39+20=\mathbf{761}$$

である．また，

$$x(19,\ 1)=\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20=190$$

となるので，

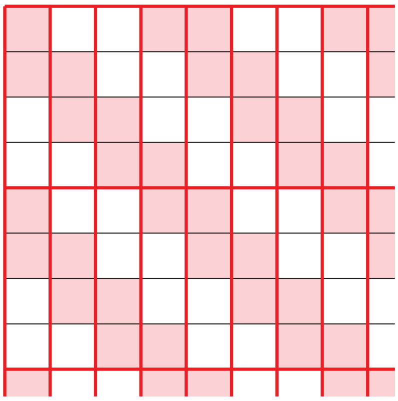
$$\begin{aligned} x(1,20) &= 190+1 \\ x(2,19) &= 190+2 \\ x(3,18) &= 190+3 \\ &\vdots \\ x(\mathbf{10},\mathbf{11}) &= 190+10=200 \end{aligned}$$

である．

(2)

$$x(1,n)=\frac{1}{2}(n-1)n+1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(n^2-n+2)}$$
$$x(n,\ n)=\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)+n=\boldsymbol{2n^2-2n+1}$$

(3)　値が奇数になっているセルに色をつけると以下のようになる．



図のように 4 行 1 列の 4 つのセルのまとまりを考えると，そのまとまりの中の奇数と偶数は同じ個数ずつになっている．これは以下のように説明できる．

$$\begin{aligned}&x(i+2,j)-x(i,j)\\=&\frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i+2-\frac{1}{2}(i+j-2)(i+j-1)-i\\=&2(i+j)+1\end{aligned}$$

より $x(i,j)$ と $x(i+2,j)$ の偶奇が異なる．ということは 4 つのまとまりのセルの 1 個目と 3 個目，2 個目と 4 個目の偶奇が逆になっているということなので，4 つのまとまりの中の偶数と奇数は同じ個数ずつになっている．

20 は 4 の倍数なので，1 行目から 20 行目，1 列目から 20 列目を取り出した 400 個のセルは 4 個ずつのまとまりに分割できるので，偶数と奇数は同じ個数ずつある．したがって $a(20)=\mathbf{200}$ である．

講評

1［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) 易 (4) 易 (5) 易 (6) 標準 (7) 標準)

本年度の 1 日目 (2/2) と違って難問は含まれていなかった．ここでしっかり点数をとっておきたい．

2［図形と方程式，平面図形］(標準)

最後の設問のみ戸惑った受験生もいたかもしれないが，全体的には基本テクニックが習得できているかを問う標準的な出題だった．(5) は，誘導に乗って a, b を s, t で表して計算していけば答が得られるが，方針が立てられなかった受験生も多いだろう．

3［数列］(標準～やや難)

群数列の比較的典型的な出題．(3) は対応力が試される問題であった．なお，今年度の入試では金沢医科大学前期（2 日目）でも同様の群数列の出題があった．

本年度の 1 日目と同様に，昨年度までと比較するとやや穏やかな難易度の問題が多かった．小問集合は，(7) の図形の問題で苦労した受験生は多いかも知れないが，他の設問は落としたくない．大問では，2 (5), 3 (3) が難しいが，それ以外はできるだけ多くの正答がほしい．

目標は 75%.