解答速報

久留米大学医学部（前期） 数学

2023年 2月 1日実施

1. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $|\vec{a}-\vec{b}|=1$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=3$ を満たしているとき，

(1) $|\vec{a}|^2$ と $|\vec{b}|^2$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ だけで表すと，

$$|\vec{a}|^2=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b},\ |\vec{b}|^2=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

である。

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ のとりうる値の範囲は，

$$\boxed{\text{エ}}\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|$ のとりうる値の最大値と最小値は，

$$\text{最大値}\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \text{最小値}\boxed{\text{コ}}$$

である。

解答

解答記号	正解
ア，イ	1，4
ウ	6
エ，$\dfrac{\text{オ}}{\text{カキ}}$	0，$\dfrac{6}{25}$
$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{7}{5}$
コ	1

解説

(1) それぞれ 2 乗することにより，

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1\cdots①$$

$$9|\overrightarrow{a}|^2+12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2=9\cdots②$$

を得るので ①, ② より $|\overrightarrow{a}|^2=\mathbf{1-4}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{b}|^2=\mathbf{6}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ であることから，この式の両辺を 2 乗して (1) の結果を代入すると,

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(1-4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\cdot 6\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\cos^2\theta\cdots③$$

また，(1) の結果より $0\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq\dfrac{1}{4}\cdots④$ である.

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\fallingdotseq 0$ のとき③の両辺を $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で割ることにより,

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=(6-24\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\cos^2\theta \iff \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{6\cos^2\theta}{1+24\cos^2\theta}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4+96\cos^2\theta}$$

を得る．したがって $0<\cos^2\theta\leqq 1$ から $0<\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq\dfrac{6}{25}$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ のときも条件を満たすので，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ のとりうる値の範囲は $0\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq\dfrac{6}{25}\cdots⑤$

④, ⑤ から $\mathbf{0}\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{25}}$ である.

別解

$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{q}=3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ とおくことにより，$\overrightarrow{a}=\dfrac{2\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}$, $\overrightarrow{b}=\dfrac{-3\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}$ を得る.

すると，$|\overrightarrow{p}|=1$, $|\overrightarrow{q}|=3$ のときの $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ つまり，$\left(\dfrac{2\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{-3\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}\right)$ のとりうる値の範囲を求めることと同値となる．$\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ のなす角を α とすると,

$$\left(\frac{2\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}\right)\cdot\left(\frac{-3\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}}{5}\right)=\frac{1}{25}(-6|\overrightarrow{p}|^2-\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q}+|\overrightarrow{q}|^2)=\frac{1}{25}(3-3\cos\alpha)$$

である．ここで α は任意の角をとるので $-1\leqq\cos\alpha\leqq 1$ から $\mathbf{0}\leqq\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\leqq\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{25}}$ である.

(3)

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=1+4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\ (\because (1))$$

これに (2) の結果を用いて $1\leqq|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2\leqq\dfrac{49}{25}$

したがって $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ の最大値は $\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}$, 最小値は $\mathbf{1}$ である.

2. どの目も等しい確率で出る 1 個のサイコロを 1 回投げ，出た目が 3 の倍数ならば 2 点が加点され， 3 の倍数でなければ 1 点が減点されるゲームをくり返し行う。最初の持ち点を 0 点とするとき，

(1) 3 回目のゲーム終了時に 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

(2) 6 回目のゲーム終了時にはじめて 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタチ}}$ である。

(3) 3 回目のゲーム終了時に 0 点になり，9 回目のゲーム終了時に 2 回目の 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナニヌネ}}$ である。

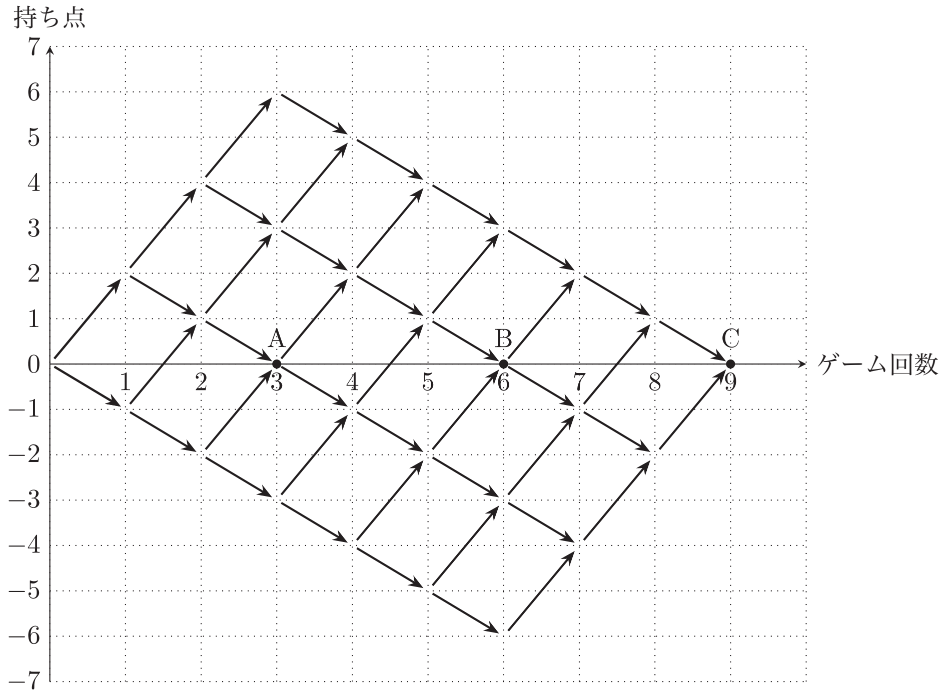
(4) 9 回目のゲーム終了時にはじめて 0 点となる確率は $\dfrac{\boxed{ノハヒ}}{\boxed{フヘホマ}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{サ}{シ}$	$\dfrac{4}{9}$
$\dfrac{スセ}{ソタチ}$	$\dfrac{32}{243}$
$\dfrac{ツテト}{ナニヌネ}$	$\dfrac{128}{2187}$
$\dfrac{ノハヒ}{フヘホマ}$	$\dfrac{448}{6561}$

解説

持ち点の変化は下図のようになっている．



サイコロの目が 3, 6 のいずれかであれば右上に動き（これを事象 U とする)，サイコロの目が 1, 2, 4, 5 のいずれ

かであれば右下に動く（これを事象 D とする）．U, D が起こる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ である．

(1)　図の点 A に達する確率を求めればよい．U が 1 回，D が 2 回起こればよいので，求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{4}{9}}.$$

(2)　図の点 B に達する事象のうち，A を経由するものを除けばよい．B に達するには U が 2 回，D が 4 回起これればよいので，その確率は ${}_6\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$ である．また，A を経由して B に達する確率は，(1) を利用すれば $\left(\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{16}{81}$．

したがって求める確率は $\dfrac{80}{243}-\dfrac{16}{81}=\boldsymbol{\dfrac{32}{243}}$．

(3)　図の点 A に達し，その後は B を経由せずに C に達する確率を求めればよい．A を出発して B を経由せずに C に達する確率は (2) の結果と等しいから，(1) も利用すれば求める確率は $\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{32}{243}=\boldsymbol{\dfrac{128}{2187}}$．

(4)　C に達するには，U が 3 回，D が 6 回起これればよいので，その確率は ${}_9\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^6=\dfrac{1792}{6561}$ である．

C に達する事象のうち題意の余事象は，A, B を通るかどうかに注目すれば以下表のように分類できる．(○はその点を通る，× はその点を通らない)

A	B	確率	
○	○	$\left(\dfrac{4}{9}\right)^3=\dfrac{64}{729}$	
○	×	$\dfrac{128}{2187}$	← (3) の答
×	○	$\dfrac{128}{2187}$	← (3) の答と同じ

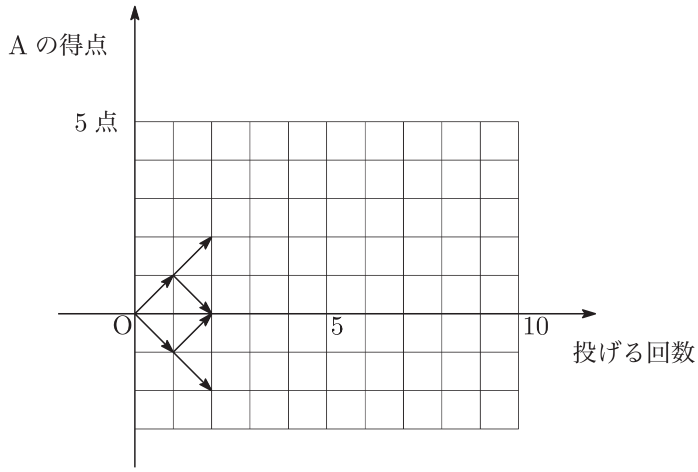
よって求める確率は，

$$\frac{1792}{6561}-\left(\frac{64}{729}+\frac{128}{2187}\times 2\right)=\boldsymbol{\frac{448}{6561}}$$

的中!!

直前講習テキスト

A と B の 2 人が硬貨を投げるゲームをしている．表が出れば，A は B から 1 点を得，裏が出れば B は A から 1 点を得るものとする．A，B とも持ち点 0 点から始めて，先に 5 点を得た人が勝ちとなり，ゲームは終わる．硬貨の表，裏が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ とし，硬貨を 10 回投げる間に A の勝つ確率を，次の図を参考にして求めよ．



3. n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq 2^{\log_2 x + x} \\ y \leqq -x^2 + n(2^n + n) \end{cases}$$

で表される領域を D_n とする。ただし， x 座標と y 座標がともに整数となる点を「格子点」と呼ぶものとする。

(1) D_2 に含まれる格子点の個数は $\boxed{\text{ミム}}$ 個である。

(2) $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ とするとき，

$$S = \left(n - \boxed{\text{メ}}\right) \cdot 2^{n+\boxed{\text{モ}}} + \boxed{\text{ヤ}}$$

である。

(3) D_n に含まれる格子点の個数を n を用いて表すと，

$$\frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}n^3 - \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}n^2 + \frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}n - \boxed{\text{ロ}} + \left(n^2 - \boxed{\text{ワ}}\,n + \boxed{\text{ン}}\right) \cdot 2^n$$

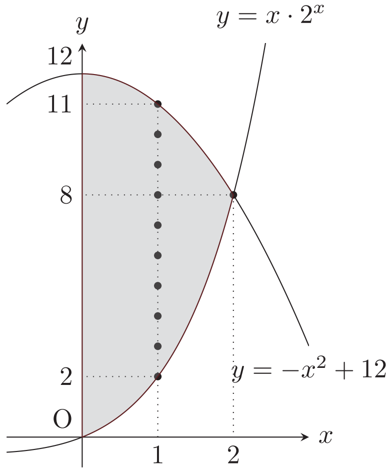
である。

解答

解答記号	正解
ミム	11
メ，モ，ヤ	1，1，2
$\frac{\text{ユ}}{\text{ヨ}}$，$\frac{\text{ラ}}{\text{リ}}$，$\frac{\text{ル}}{\text{レ}}$，ロ，ワ，ン	$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{6}$，2，2，2

解説

(1) 真数条件より $x > 0$ であり， $y = 2^{\log_2 x + x} = x \cdot 2^x$ であるから，D_2 は右図の灰色部分（境界を含む．ただし，y 軸上の点は除く）となる．格子点は $x = 1$ のとき 10 個，$x = 2$ のとき 1 個あるので D_2 に含まれる格子点の個数は **11** 個である．



(2)

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S & = & 1\cdot 2 & + & 2\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2^3 & + & \cdots & + & n\cdot 2^n & & \\ -) & 2S & = & & & 1\cdot 2^2 & + & 2\cdot 2^3 & + & \cdots & + & (n-1)\cdot 2^n & + & n\cdot 2^{n+1} \\ \hline & -S & = & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \cdots & + & 2^n & - & n\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

より $-S = \dfrac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} = -(n-1) \cdot 2^{n+1} - 2.$

となるので，$S = (n - \mathbf{1}) \cdot 2^{n+\mathbf{1}} + \mathbf{2}$

(3)　D_n は右図の灰色部分（境界を含む．ただし，y 軸上の点は除く）となる．k $(0 < k \leqq n)$ を整数とすると，D_n 内において直線 $x = k$ 上に

$$-k^2 + n(2^n + n) - k \cdot 2^k + 1$$

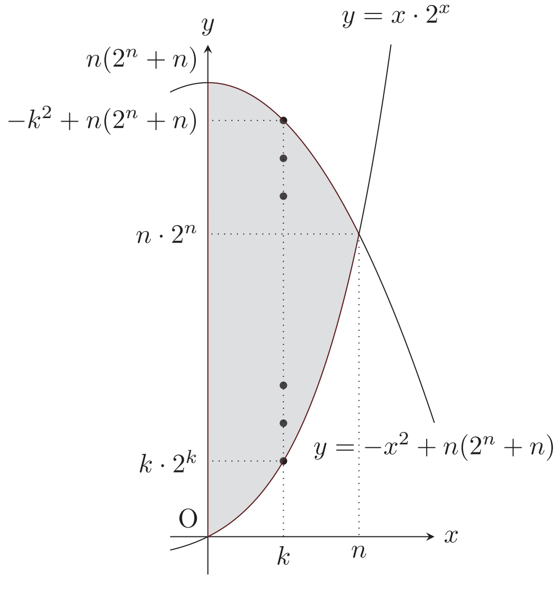
個の格子点があるので，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n} \{-k^2 + n(2^n + n) - k \cdot 2^k + 1\}$$

$$= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n^2(2^n + n)$$

$$- (n-1) \cdot 2^{n+1} - 2 + n \quad (\because (2))$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}}n^3 - \boldsymbol{\frac{1}{2}}n^2 + \boldsymbol{\frac{5}{6}}n - \boldsymbol{2} + \left(n^2 - \boldsymbol{2}n + \boldsymbol{2}\right) \cdot 2^n$$



4. 平面上に点 O を中心とする半径が 1 の円 C_1 と，点 O を中心とする半径が $\sqrt{6}$ の円 C_2 がある。円 C_2 上に点 A をとり，点 A から円 C_1 に引いた接線と円 C_1 との接点の 1 つを P，直線 OP と円 C_1 の交点のうち点 P と異なる点を Q，直線 AQ と円 C_1 との交点のうち点 Q と異なる点を R とおく。

このとき，

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\boxed{\text{あ}}},\ \mathrm{AQ} = \boxed{\text{い}},\ \mathrm{AR} = \frac{\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}$$

であり，直線 AP と円 C_2 の交点のうち点 A と異なる点を S，直線 AO と直線 SQ の交点を T とおくと，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PS} = \boxed{\text{お}} : \boxed{\text{か}},\ \mathrm{ST}:\mathrm{TQ} = \boxed{\text{き}} : \boxed{\text{く}}$$

である。ここで，$\boxed{\text{お}}$ 〜 $\boxed{\text{く}}$ は最小の自然数を用いて答えよ。

さらに，直線 PR と直線 OA の交点を点 U，直線 PR と円 C_2 の 2 つの交点を D，E とすると，

$$\mathrm{AU} = \frac{\boxed{\text{け}}\sqrt{\boxed{\text{こ}}}}{\boxed{\text{さ}}}$$

であるので，

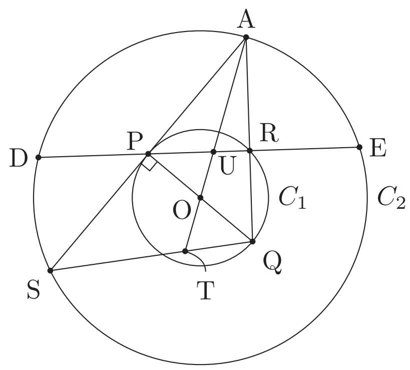
$$\mathrm{DU} \times \mathrm{EU} = \frac{\boxed{\text{しすせ}}}{\boxed{\text{そた}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
$\sqrt{\text{あ}}$	$\sqrt{5}$
い	3
$\dfrac{\text{う}}{\text{え}}$	$\dfrac{5}{3}$
お : か	1 : 1
き : く	2 : 1
$\dfrac{\text{け}\sqrt{\text{こ}}}{\text{さ}}$	$\dfrac{5\sqrt{6}}{7}$
$\dfrac{\text{しすせ}}{\text{そた}}$	$\dfrac{270}{49}$

解説



$\mathrm{OP}=1$，$\mathrm{OA}=\sqrt{6}$ であるから，$\triangle\mathrm{APO}$ において，三平方の定理より，

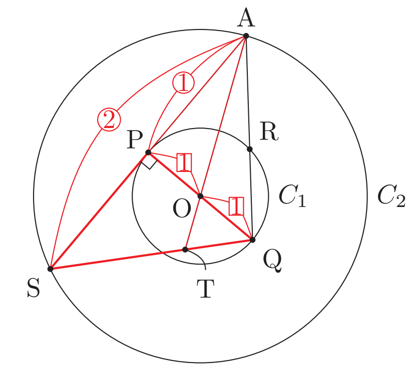
$$\mathrm{AP}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-1^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{PQ}=2$ より，$\triangle\mathrm{APQ}$ においても同様にして，

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=\mathbf{3}$$

方べきの定理より，

$$\mathrm{AR}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AP}^2 \iff 3\mathrm{AR}=(\sqrt{5})^2 \iff \mathrm{AR}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$



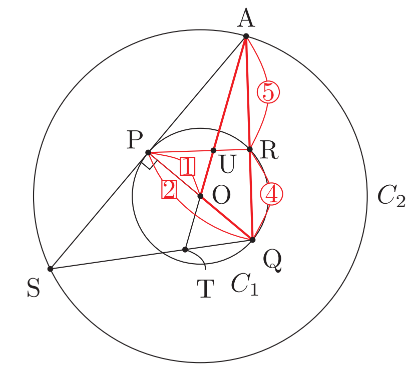
また，線分 AS は円 C_2 の弦であり，$\mathrm{AS}\perp\mathrm{OP}$ であることから，点 P は線分 AS の中点である．したがって，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PS}=\mathbf{1}:\mathbf{1}$$

である．$\triangle\mathrm{PQS}$ と直線 AT について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OQ}}\cdot\frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{TS}}=1 \iff \mathrm{ST}:\mathrm{TQ}=\mathbf{2}:\mathbf{1}$$

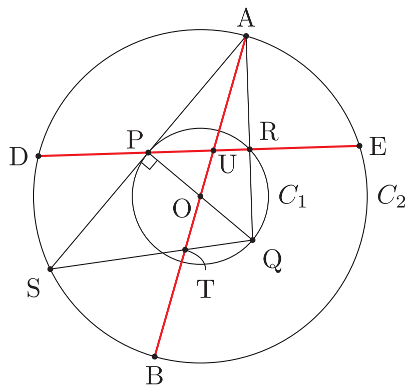
である．



$\triangle\mathrm{AOQ}$ と直線 PR について，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PO}}\cdot\frac{\mathrm{OU}}{\mathrm{UA}}=1 \iff \mathrm{AU}:\mathrm{UO}=5:2$$

であるから，$\mathrm{AU}=\dfrac{5}{7}\mathrm{AO}=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{6}}}{\mathbf{7}}$ である．



直線 AU と円 C_2 の交点で，点 A と異なるものを点 B とすると，方べきの定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{DU}\times\mathrm{EU}&=\mathrm{AU}\times\mathrm{BU}\\&=\frac{5\sqrt{6}}{7}\left(2\sqrt{6}-\frac{5\sqrt{6}}{7}\right)\\&=\frac{\mathbf{270}}{\mathbf{49}}\end{aligned}$$

である．

5. 関数 $f(x)$ は積分区間の範囲の中で定義される連続な関数である。ただし，a は実数の定数とし，e は自然対数の底とする。

(1) $\displaystyle\int_1^{\log x} f(t)\,dt = 2x - 2e$ のとき，$f(x) = \boxed{\text{ち}}\, e^x$ である。

(2) $\displaystyle\int_1^{2} (x+t)f(t)\,dt = f(x) + 2x - 4$ のとき，$f(x) = \dfrac{\boxed{\text{つてと}}\,x + \boxed{\text{なに}}}{5}$ である。

(3) $\displaystyle\int_1^{\log x} f(t)\,dt - \int_1^{2} (x+t)f(t)\,dt = 2x + a$ のとき，

$f(x) = \dfrac{\boxed{\text{ぬね}}\,e^x}{e^2 - e - 1}$ であり，$a = \dfrac{\boxed{\text{の}}\,e^2 + \boxed{\text{は}}\,e}{e^2 - e - 1}$ である。

解答

解答記号	正解
ち	2
つてと，なに	−12, 16
ぬね	−2
の，は	2，2

解説

本問においては，

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\big(F(g(x)) - F(a)\big) = f(g(x))g'(x)$$

という公式を用いる（ここで $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である）．すなわち，

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\log x} f(t)\,dt = \frac{f(\log x)}{x}$$

である．

(1) 与式の両辺を微分すると，$\dfrac{f(\log x)}{x} = 2$ より $f(\log x) = 2x$．ここに $x = e^t$ を代入すると $f(t) = 2e^t$．したがって，$f(x) = \mathbf{2}e^x$ である．

(2) 与式は

$$x\int_1^2 f(t)\,dt + \int_1^2 tf(t)\,dt = f(x) + 2x - 4$$

となるので，$\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt = A,\ \int_1^2 tf(t)\,dt = B$ とおくと，

$$Ax + B = f(x) + 2x - 4 \iff f(x) = (A-2)x + B + 4$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\,dt &= \int_1^2 \{(A-2)t + B + 4\}\,dt \\ &= \left[(A-2)\frac{t^2}{2} + (B+4)t\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2}A + B + 1\end{aligned}$$

より，

$$A=\frac{3}{2}A+B+1 \iff A+2B=-2 \ \cdots \ ①$$

同様に

$$\begin{aligned}\int_1^2 tf(t)\,dt &= \int_1^2 \{(A-2)t^2+(B+4)t\}\,dt \\ &= \left[(A-2)\frac{t^3}{3}+(B+4)\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{7}{3}A+\frac{3}{2}B+\frac{4}{3}\end{aligned}$$

より，

$$B=\frac{7}{3}A+\frac{3}{2}B+\frac{4}{3} \iff 14A+3B=-8 \ \cdots \ ②$$

①, ②を解いて $(A,\ B)=\left(-\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ となるので，

$$f(x)=\frac{\boldsymbol{-12}x+\boldsymbol{16}}{5}$$

である．

(3)　与式は

$$\int_1^{\log x} f(t)\,dt - x\int_1^2 f(t)\,dt - \int_1^2 tf(t)\,dt = 2x+a$$

となるので，両辺を微分すると，

$$\frac{f(\log x)}{x}-\int_1^2 f(t)\,dt=2 \iff f(\log x)=\left(\int_1^2 f(t)\,dt+2\right)x$$

である．$\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt=A$ とおくと，

$$f(\log x)=(A+2)x$$

であり，$x=e^t$ を代入すると，

$$f(t)=(A+2)e^t$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(t)\,dt &= \int_1^2 (A+2)e^t\,dt \\ &= \Big[(A+2)e^t\Big]_1^2 \\ &= (e^2-e)A+2e^2-2e\end{aligned}$$

より，

$$A=(e^2-e)A+2e^2-2e \iff A=\frac{-2e^2+2e}{e^2-e-1}=-2+\frac{-2}{e^2-e-1}$$

よって，

$$f(x)=\frac{\boldsymbol{-2}e^x}{e^2-e-1}$$

が得られる．さらに，与式に $x=e$ を代入すると，

$$-\int_1^2 (e+t)f(t)\,dt = 2e+a$$

より，

$$\begin{aligned}
a &= -2e - \int_1^2 (e+t)\frac{-2e^t}{e^2-e-1}\,dt \\
&= -2e + \frac{2}{e^2-e-1}\Big[(t-1+e)e^t\Big]_1^2 \\
&= -2e + \frac{2}{e^2-e-1}\{(1+e)e^2-e^2\} \\
&= \frac{-2e^3+2e^2+2e+2e^3}{e^2-e-1} \\
&= \frac{\mathbf{2}e^2+\mathbf{2}e}{e^2-e-1}
\end{aligned}$$

的中!!

久留米大学医学部対策 (1/13)

a を $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，$F(x)=\displaystyle\int_0^x (t-a)\sin t\,dt\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ とおく．

(1) $F(x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ における最大値と最小値をそれぞれ a を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最大値と最小値の積を最小にする a の値を求めよ．

冬期講習テキスト

等式 $f(x-1)=1+2\displaystyle\int_0^1 (xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

講評

1. ［平面ベクトル］（やや難）

平面ベクトルの大きさや内積の範囲を求める問題であったが (2) 以降で戸惑った受験生も多かったかもしれない．(1) は確実に得点したい．(2) 以降では予想で埋めることができた受験生もいただろう．

2. ［確率］（やや難）

得点のやり取りがある確率の問題で，ある程度視覚化して作業をしないと作業が煩雑になる問題であった．それまでの結果をうまく使いながら作業を進めたいが，やや得点しづらかったのではないだろうか．

3. ［数列］（標準）

格子点に関する問題．まずは式変形をしっかりと行い，$y = x \cdot 2^x$ が単調増加であることをふまえて処理したい．仮に (1) ができなくとも (2) は定番の数列の和の問題であるため，確実にとりたい．(3) も格子点の考え方を用いる典型題であるためしっかりと合わせられるよう頑張りたいところである．

4. ［平面図形］（やや難）

共通テストを意識させるような平面図形の問題であった．図を正確に描くことがなかなか難しく苦労した受験生が多かったかもしれない．複雑な図形の場合は必要な部分のみ切り出して考えることなども心がけたい．方べきの定理やメネラウスの定理などもスムーズに運用できるよう訓練しておきたい．

5. ［数学Ⅲの積分］（やや難）

定積分を含む関数方程式の問題．積分区間に x が含まれる定積分を微分するタイプと，定数となる定積分を文字でおくタイプの両方が出題された．どの問題も処理力で差がつく設定となっている．何とか (1)(2) は押さえたい．なお，解答枠の形から，未知の係数を適当に文字でおいて答を得るという手もある．

2022 年度前期と比較して，分量，問題の難易度ともに得点しにくくなっている．例年，必ず完答すべき問題がいくつか含まれるが，今回はそのレベルの問題がない．前半の設問が解けなくても後半の設問で得点する，といった粘り強さも必要．目標は 50%．