

兵庫医科大学 数学

2023年1月 25日実施

1 次の (1) から (5) までの各問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

(1) 次の不等式を満たす整数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

$$6^n < 5^{20} < 6^{n+1}$$

(2) 実数 x, y が $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$ を満たすとき、

(a) $|x| + |y|$ の最小値とそのときの x および y の値を求めよ。

(b) $|x| + |y|$ の最大値とそのときの x および y の値を求めよ。

(3) xyz 空間において、2点 $(5, 1, 2)$, $(-3, 7, 12)$ を直径の両端とする球面がある。この球面が、 z 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(4) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 (x+2)(x-1)^9 dx$$

(5) 次の文章は、『貯蓄額や所得の多い少ないは「学歴」と関係あるのか?』という記事¹からの抜粋である。

表は厚生労働省の令和元年国民生活基礎調査から、学歴ごとの平均所得金額（15歳以上の雇
用者1人あたり）をまとめたものです。（中略）

男性・女性ともに専門学校・短大・高専卒の方が所得金額が多いのに、総数となると高校・旧
制中卒の方が多いのは統計上の謎です。

	小学・ 中学卒業	高校・旧 制中卒業	専門学校・短 大・高専卒業	大学・大 学院卒業
総数	245.2 万円	303.5 万円	278.6 万円	487.4 万円
男性	300.8 万円	404.6 万円	409.0 万円	584.6 万円
女性	160.5 万円	186.1 万円	216.6 万円	291.5 万円

男性の所得金額も女性の所得金額もともに、専門学校・短大・高専卒業の方が、高校・旧制中卒業より多いのに、
総数（男性 + 女性）では、逆転した結果になっている。これはどうしてか、説明しなさい。

¹ あるじゃん All About マネー。 ”貯蓄額や所得の多い少ないは学歴と関係あるのか？”

解答

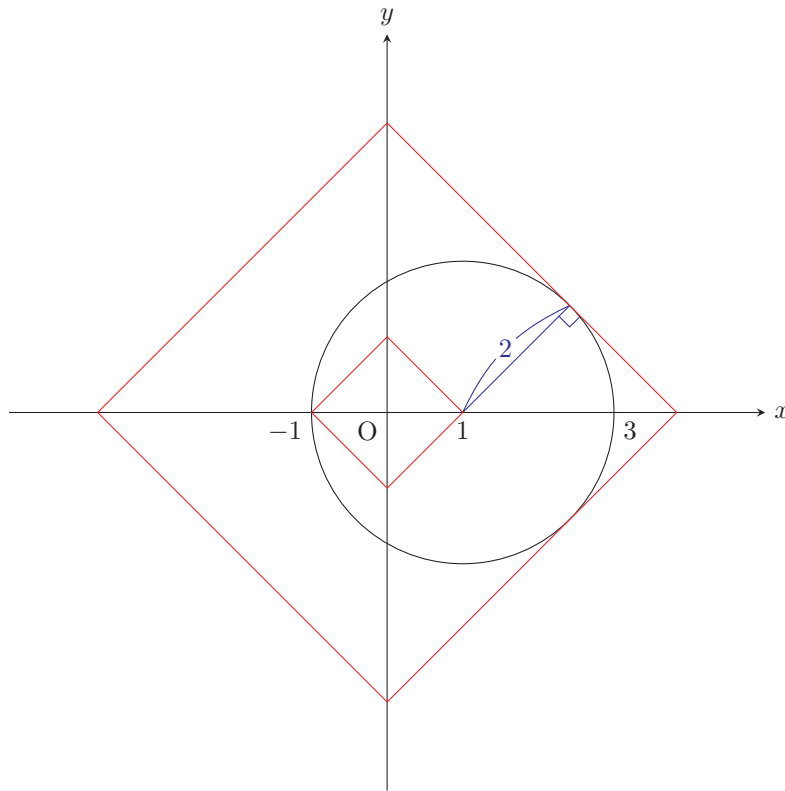
(1) $6^n < 5^{20} < 6^{n+1}$ に常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 6^n < \log_{10} 5^{20} < (n+1) \log_{10} 6 \\ \iff n(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) < 20(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) < (n+1)(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ \iff 0.7781n < 13.98 < 0.7781(n+1) \\ \iff n < \frac{13.98}{0.7781} < n+1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{13.98}{0.7781} = 17.96\dots$ であるので求める整数 n は $n = 17$ である。

(2) $(x-1)^2 + y^2 = 4$ と変形できるので実数 x, y は中心 $(1, 0)$ 、半径 2 の円上を動く。

ここで、 $|x| + |y| = k$ ($k > 0$) \dots ① とすると、これは 4 点 $(k, 0), (0, k), (-k, 0), (0, -k)$ を頂点とする正方形を表す。



(a) 最小となるときは図より ① が $(-1, 0)$ を通るときであり、これが (x, y) である。最小値は 1 。

(b) 最大となるときは $x \pm y - k = 0$ が円に接するときであり、これらの直線と円の中心との距離が円の半径と等しければよい。したがって、 $\frac{|1-k|}{\sqrt{2}} = 2 \iff k = 1 \pm 2\sqrt{2}$ であり、 $k > 0$ であるから、 $k = 1 + 2\sqrt{2}$ である。したがって、最大値は $1 + 2\sqrt{2}$ 。このとき、 $x + y - k = 0$ と円の接点を P 、円の中心を A とすると、直線 AP の傾きが 1 であり、 AP の長さが 2 であることから、 $\vec{AP} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を得る。よって $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

$x - y - k = 0$ との接点も同様に求められる。求める x, y の値は $(x, y) = (1 + \sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ 。

(3) $A(5, 1, 2), B(-3, 7, 12)$ とする。これらを直径の両端とする球面の中心を M とすると、 M は AB の中点 $(1, 4, 7)$ である。

また、 $AM^2 = (1-5)^2 + (4-1)^2 + (7-2)^2 = 50$ であるので、球面の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = 50$$

である。したがってこの球面と z 軸との交点は $x = 0, y = 0$ を代入して

$$1 + 16 + (z - 7)^2 = 50 \iff z = 7 \pm \sqrt{33}$$

よって、この球面が z 軸が切り取る線分の長さは $7 + \sqrt{33} - (7 - \sqrt{33}) = 2\sqrt{33}$.

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+2)(x-1)^9 dx &= \int_0^1 (x-1+3)(x-1)^9 dx \\ &= \int_0^1 \{(x-1)^{10} + 3(x-1)^9\} dx \\ &= \left[\frac{1}{11}(x-1)^{11} + \frac{3}{10}(x-1)^{10} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{11} - \frac{3}{10} \\ &= -\frac{23}{110} \end{aligned}$$

別解

$x - 1 = t$ と置換をしてもよい。

- (5) 専門学校・短大・高専卒業生においては女性の割合が高く総数での平均所得が低く抑えられているのに対して、高校・旧制中学校卒業生においては男性の割合が高く総数での平均所得は上がっていると考えられるから。

2 以下の問いに答えよ。なお、途中の式や考え方等も記入すること。

- (1) 点 $(3, -2)$ を、原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転したときの点の座標を求めよ。
 (2) 3点 $A(1, 1)$, $B(3, -2)$, C について、 $AB = AC$ かつ $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ であるとき、点 C の座標を求めよ。

複素数平面上で原点 O と 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。直線 OB に関して点 A と対称な点を C , 直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする。

- (3) 点 $C(\gamma)$ とするとき、 $\gamma = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta$ であることを示せ。ただし、 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ と共役な複素数を $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ で表すとする。
 (4) 辺 AB と直線 DC が平行なとき、 $\triangle OAB$ はどのような三角形か、求めよ。

解答

- (1) 複素数平面で考える。求める点を表す複素数を w とすると、

$$\begin{aligned} w &= (3 - 2i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= (3 - 2i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \right) i \end{aligned}$$

したがって求める座標は $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$

- (2) 条件より C は B を A の回りに $\pm \frac{\pi}{3}$ 回転させた点であるので、 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とすると、

$$\begin{aligned} \gamma &= (\beta - \alpha) \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) \right\} + \alpha \\ &= (2 - 3i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 1 + i \\ &= 2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} \right) i \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

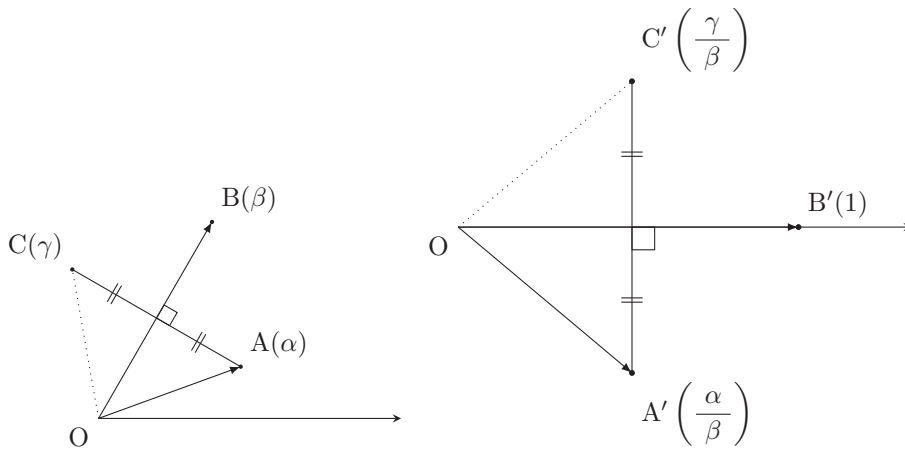
したがって求める座標は $\left(2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3} \right)$ (複号同順)

- (3) β を 1 にする変換 $\left(\frac{1}{\beta} \text{倍する} \right)$ を行うことにより α, β, γ はそれぞれ $\frac{\alpha}{\beta}, 1, \frac{\gamma}{\beta}$ となる。

$A' \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)$, $B'(1)$, $C' \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)$ とすると、点 A' と点 C' は直線 OB' (実軸) に関して対称、すなわち $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}$ は互いに共役な複素数であるから

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)} = \frac{\gamma}{\beta} \iff \gamma = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)} \beta$$

となる。(証明終)



(4) (3)と同様にして $\delta = \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha$ がわかる. 以下では $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$ としてよい. このとき,

辺 AB と直線 DC が平行

$$\iff \frac{\gamma - \delta}{\beta - \alpha} = \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha}{\beta - \alpha} \text{ が実数} \dots \text{①}$$

である. ここで,

$$\frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\beta - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\frac{\beta}{\alpha} - \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\frac{\beta}{\alpha} - 1}$$

であるから, $\frac{\beta}{\alpha} = z$ とおくと,

$$\text{①} \iff \frac{\frac{z}{\bar{z}} - \bar{z}}{z - 1} = \frac{z - (\bar{z})^2}{|z|^2 - \bar{z}}$$

が実数となればよい. したがって,

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z - (\bar{z})^2}{|z|^2 - \bar{z}}\right)} &= \frac{z - (\bar{z})^2}{|z|^2 - \bar{z}} \\ \iff \frac{\bar{z} - z^2}{|z|^2 - z} &= \frac{z - (\bar{z})^2}{|z|^2 - \bar{z}} \\ \iff (z - \bar{z})(z + \bar{z})(|z|^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる. ここで, $\bar{z} = z$ のとき $\frac{\beta}{\alpha}$ が実数となるが, このとき, O, A, B は同一直線上にあることになり不適. したがって, $\bar{z} + z = 0$ または $|z| = 1$ である.

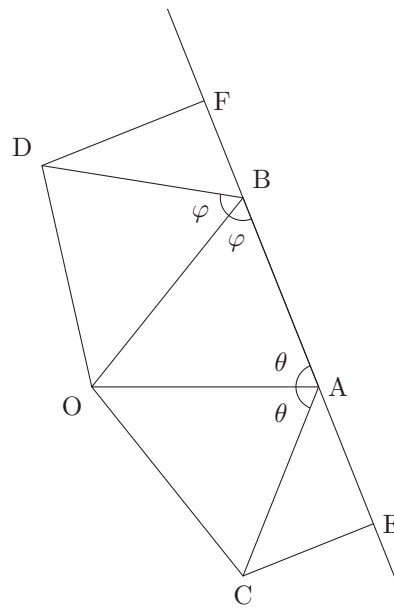
(i) $\bar{z} + z = 0$ のとき, $z \neq 0$ であるからこれは純虚数である. すなわち $\frac{\beta}{\alpha}$ が純虚数であることから $\angle AOB$ の大きさが $\frac{\pi}{2}$ となる.

(ii) $|z| = 1$ のとき $|\alpha| = |\beta|$ であるからこれは $OA = OB$ の二等辺三角形となる.

以上により, $\triangle OAB$ は $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形または $OA = OB$ の二等辺三角形である.

別解

幾何的に考えると次のようになる.



C から直線 AB に下ろした垂線と AB の交点を E, D から直線 AB に下ろした垂線と AB の交点を F とする. $\angle OAB = \theta$, $\angle OBA = \varphi$ とおく. 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 AB \parallel CD &\iff \vec{CE} = \vec{DF} \\
 &\iff \sin(\pi - 2\theta) = \sin(\pi - 2\varphi) \\
 &\iff \sin 2\theta = \sin 2\varphi \\
 &\iff 2 \cos(\theta + \varphi) \sin(\theta - \varphi) = 0 \\
 &\iff \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \theta = \varphi
 \end{aligned}$$

これより同じ結果が得られる.

3 以下の問いに答えよ。ただし、 n は自然数とし、 $0! = 1$ とする。なお途中の式や考え方等も記入すること。

(1) S_1 を

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+1)!}$$

とすとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1$ を求めよ。

(2) S_2 を

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+2)!}$$

とすとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_2$ を求めよ。

(3) S_3 を

$$S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+3)!}$$

とすとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_3$ を求めよ。

(4) 次の和 S_p を推測し、それを数学的帰納法によって証明せよ。ただし、 p は自然数とする。

$$S_p = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{(k+p)!}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = 1$.

(2)

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \end{aligned}$$

なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \frac{1}{4}$.

(3)

$$S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}
\end{aligned}$$

なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_3 = \frac{1}{18}$.

(4) 以下では, S_1, S_2, S_3 と同様の方法で S_p を求めている。「推測して帰納法で示す」ということはしていない.

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+p)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{k(k+1) \cdots (k+(p-1))} - \frac{1}{(k+1)(k+2) \cdots (k+p)} \right\} \\
&= \frac{1}{p} \left\{ \frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)} \right\}
\end{aligned}$$

講評

1 [小問集合] ((1) 易 (2) やや易 (3) やや易 (4) 標準 (5) やや難)

(1)~(4) は典型的な問題で、なるべく取りこぼしなく乗り切りたい。(5) はシンプソンのパラドックスと呼ばれるものであり、よく考えれば難しくはないが、面食らった受験生は多いだろう。

2 [複素数平面] (易~やや難)

(1)(2) は受験生にとってはやり慣れた問題であり落とせない。計算は慎重に行いたい。(3)(4) は方針が立たなかった受験生が多かったと思われるが、(3) が突破できたかどうかで差がつきそう。

3 [数列の和と極限] (易~標準)

部分分数分解を利用して数列の和を求める典型問題である。与式が階乗で表されているので戸惑った受験生もいるかも知れないが、落ち着いて解き進めたい。(4) は「数学的帰納法によって証明せよ」という指示があるが、推測ではなく直接求める方法が簡便なので上の解答ではあえてそれを載せている。

各大問とも最後の方が解きにくいですが、他は典型的な出題であり、なるべくミスなく処理したい。目標は 60%。

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せは… メビオ ☎0120-146-156 まで

医学部進学予備校
メビオ
☎0120-146-156
受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK)
大阪市中央区石町 2-3-12
ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
☎03-3370-0410
受付 8~20時(土日祝可)
東京都渋谷区代々木
1-37-14
heart of medicine
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校
英進館メビオ
福岡校
☎0120-192-215
福岡市中央区渡辺通 4-8-20
英進館 天神本館新2号館2階
<https://www.mebio-eishinkan.com/>