解答速報

福岡大学医学部（推薦）　数学

2022年 11月 27日実施

［I］次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　座標平面において，A(0, 5) とし，点 (0, 2) を中心とし半径が 2 である円を C とする。点 P が C 上を動くとき，線分 AP を 1 : 2 に外分する点の軌跡が直線 $y = 2x + 6$ を切り取ってできる線分の長さは $\boxed{(1)}$ である。

(ii)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，不等式 $\sqrt{2}\sin x + 2\cos x + \sqrt{2}\sin 2x + 1 \leqq 0$ の解は $\boxed{(2)}$ である。

(iii)　i を虚数単位とし，$a,\ b,\ c$ を 1 以上 6 以下の整数とする。等式 $\cos\dfrac{2(a-b+c)\pi}{5} + i\sin\dfrac{2(a-b+c)\pi}{5} = 1$ が成り立つような $(a,\ b,\ c)$ の総数は $\boxed{(3)}$ である。

(iv)　$a,\ b$ を異なる実数とし，実数 $\alpha,\ \beta$ は $\beta < 0 < \alpha$ を満たすとする。2 つの数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を条件 $a_1 = a,\ b_1 = b,\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n,\ b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \boxed{(4)}$ である。

解答

(i) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$　(ii) $\dfrac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi \leqq x \leqq \dfrac{7}{4}\pi$　(iii) 43　(iv) -1

解説

(i)　円 C の方程式は $x^2 + (y-2)^2 = 4$ であるので，C 上の点 P の座標を $(p,\ q)$ とすると，

$$p^2 + (q-2)^2 = 4 \cdots ①$$

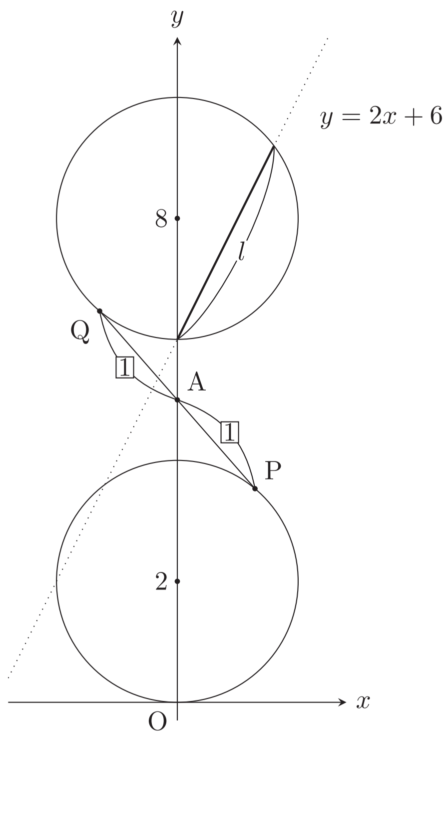
を満たす．線分 AP を 1 : 2 に外分する点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1-2} = (-p,\ 10-q)$$

であるので，

$$\begin{cases} X = -p \\ Y = 10 - q \end{cases} \iff \begin{cases} p = -X \\ q = -Y + 10 \end{cases}$$

を ① に代入して $X^2 + (Y-8)^2 = 4$ を得る．



この円の中心 $(0,\ 8)$ と直線 $2x-y+6=0$ との距離を d とすると,

$$d=\frac{|0-8+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

であり,この円の半径 r は $r=2$ であることから切り取ってできる線分の長さを l とすると,

$$l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\boldsymbol{\frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

注釈

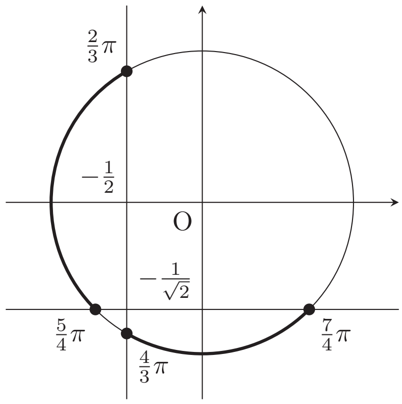
線分 PQ の中点が A なので,Q の軌跡は,点 A について円 C と対称な円となる.よってその円の中心は $(0,\ 8)$ であることはすぐわかる.

なお,この Q の軌跡の円と $y=2x+6$ との交点の座標を求めると $(0,\ 6)$, $\left(\frac{8}{5},\ \frac{46}{5}\right)$ であり,これを用いて線分長 l を求めてもよい.

(ii)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin x+2\cos x+\sqrt{2}\sin 2x+1\leqq 0 &\iff \sqrt{2}\sin x+2\cos x+2\sqrt{2}\sin x\cos x+1\leqq 0\\ &\iff (\sqrt{2}\sin x+1)(2\cos x+1)\leqq 0\\ &\iff \begin{cases}\sin x\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos x\geqq -\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ または } \begin{cases}\sin x\geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos x\leqq -\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

これらを満たす x の範囲は,下図の太線部分のようになる.



ゆえに,与えられた不等式の解は, $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi,\ \frac{4}{3}\pi\leqq x\leqq\frac{7}{4}\pi.}$

注釈

$\sqrt{2}\sin x+1=0,\ 2\cos x+1=0$ の解を求めた上で,以下のような表で積の正負を調べてもよい.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$\sqrt{2}\sin x+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$(+)$
$2\cos x+1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$(+)$
(積)	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$(+)$

(iii) 題意の等式が成り立つ条件は

$$\frac{2(a-b+c)\pi}{5}=2k\pi \iff a-b+c=5k\ (k\text{ は整数})$$

$$\iff a+c \equiv b \pmod 5$$

である．
$a+c$ を 5 で割った余りは右表の通り．
$b \equiv 1 \pmod 5$ となる b は $b=1,\ 6$ の 2 個あり，
$b \equiv 0,\ 2,\ 3,\ 4 \pmod 5$ となる b はそれぞれ 1 個ずつある．
右表から $a+c \equiv 1 \pmod 5$ となる $a,\ c$ の組は 7 個あるから，求める $(a,\ b,\ c)$ の総数は

$$7 \times 2 + (36-7) \times 1 = \mathbf{43}$$

$a \setminus c$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

(iv)

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1} &= (\alpha+\beta)a_n + (\alpha+\beta)b_n \\ &= (\alpha+\beta)(a_n+b_n) \end{aligned}$$

より，

$$a_n + b_n = (a+b)(\alpha+\beta)^{n-1}$$

また，

$$\begin{aligned} a_{n+1}-b_{n+1} &= (\alpha-\beta)a_n + (\beta-\alpha)b_n \\ &= (\alpha-\beta)(a_n-b_n) \end{aligned}$$

より，

$$a_n - b_n = (a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}$$

これより，

$$a_n = \frac{1}{2}\{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1} + (a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}\}$$
$$b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1} - (a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}\}$$

よって，十分大きい n では $b_n \fallingdotseq 0$ となるので，

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1} + (a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}}{(a+b)(\alpha+\beta)^{n-1} - (a-b)(\alpha-\beta)^{n-1}} \\ &= \frac{(a+b)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1} + (a-b)}{(a+b)\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1} - (a-b)} \end{aligned}$$

であるが，

$$1 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{-2\beta}{\alpha-\beta} > 0$$
$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - (-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-\beta} > 0$$

より，$-1 < \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} < 1$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1} = 0$．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a-b}{-(a-b)} = \mathbf{-1}$$

別解

$a-b \fallingdotseq 0$，$\alpha-\beta \fallingdotseq 0$ より $a_n-b_n \fallingdotseq 0$ なので，$c_n=\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$ とおくと，

$$c_n=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{n-1}$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n=0$ である．よって，十分大きい n では $c_n<1$ より，$b_n \fallingdotseq 0$ となるので，

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{c_n+1}{c_n-1}$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\mathbf{-1}$ である．

的中!!

推薦本科 福岡大学推薦対策 数学

直線 $x+y=a$ が円 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ によって切り取られる弦の長さが $\sqrt{14}$ となるとき，a の値は $\boxed{\quad(2)\quad}$ である．

［**II**］（記述問題）

座標平面において，2 曲線 $y=\log x$, $y=\log(x+1)$ と直線 $x=2$ および x 軸で囲まれた図形を D とするとき，次の問に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

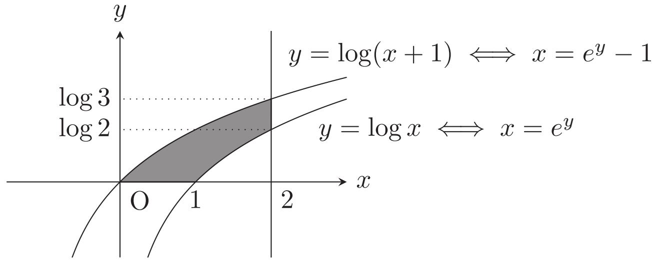
(i)　図形 D の面積を求めよ。

(ii)　図形 D を，y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

(i)　求める面積を S とすると

$$S=\int_0^2 \log(x+1)dx-\int_1^2 \log x\,dx$$
$$=\Big[(x+1)\log(x+1)-x\Big]_0^2-\Big[x\log x-x\Big]_1^2$$
$$=\mathbf{3\log 3-2\log 2-1}$$



(ii)

$$y=\log x \iff x=e^y\ (=x_1\ \text{とする})$$
$$y=\log(x+1) \iff x=e^y-1\ (=x_2\ \text{とする})$$

求める体積を V とすると

$$V=\underbrace{\int_0^{\log 2}\pi {x_1}^2 dy}_{①}+\pi\cdot 2^2\cdot(\log 3-\log 2)-\underbrace{\int_0^{\log 3}\pi {x_2}^2 dy}_{②}$$

であり，

$$\frac{①}{\pi}=\int_0^{\log 2} e^{2y}dy$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^{\log 2}$$
$$=\frac{3}{2}$$
$$\frac{②}{\pi}=\int_0^{\log 3}(e^y-1)^2\,dy$$
$$=\int_0^{\log 3}\left(e^{2y}-2e^y+1\right)dy$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^{\log 3}$$
$$=\log 3$$

であるから，

$$V=\frac{3}{2}\pi+4\pi(\log 3-\log 2)-\pi\log 3$$
$$=\boldsymbol{\left(\frac{3}{2}+3\log 3-4\log 2\right)\pi}$$

別解

いわゆるバウムクーヘン分割を用いると以下のようになる.

$$V = \int_0^2 2\pi x \log(x+1)dx - \int_1^2 2\pi x \log x\, dx$$

$$\therefore\ \frac{V}{2\pi} = \int_0^2 x \log(x+1)dx - \int_1^2 x \log x\, dx$$

$$= \int_0^2 (x+1)\log(x+1)dx - \int_0^2 \log(x+1)dx - \int_1^2 x\log x\, dx$$

(第 1 項と第 2 項に対して平行移動を行う)

$$= \int_1^3 x \log x\, dx - \int_1^3 \log x\, dx - \int_1^2 x \log x\, dx$$

$$= \int_2^3 x \log x\, dx - \int_1^3 \log x\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2\right]_2^3 - \Big[x\log x - x\Big]_1^3 \quad \text{(部分積分を用いた)}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\log 3 - 2\log 2$$

$$\therefore\ V = \boldsymbol{\left(\frac{3}{2} + 3\log 3 - 4\log 2\right)\pi}$$

講評

［I］［小問集合］

(i)［図形と方程式］（やや易）ある軌跡（円）によって直線から切り取られる線分の長さを求める問題．基本的なので落としたくない．

(ii)［三角関数］（標準）左辺を因数分解した上で，場合分けして考えればよいが，やや慎重さを要する．

(iii)［場合の数，複素数平面］（標準）$(a,\ b,\ c)$ の組を丹念に調べ上げていけばよい．$a+c \equiv b \pmod 5$ と考えたいところ．

(iv)［数列，極限］（やや難）連立漸化式について極限を求める問題．定型処理ではあるが，文字が多いので難しく感じた受験生は多いだろう．

［II］［数学Ⅲの積分］（標準）対数関数のグラフについて面積・体積を求める問題．実にオーソドックスな設定であり，難しくはないが，正確に処理する訓練をしてきたかどうかで差がつくだろう．

形式に変化はなかった．小問，大問とも手がつきやすい問題が多いが，処理力は必要で，英語と合わせて 60 分という制限時間を考えると高得点を取るのは簡単ではない．[I](i) と [II](i) を完答した上で，[I](ii)(iii) と [II](ii) のうち半分強をとりたいところ．目標は 60%.