解答速報

福岡大学医学部　数学

2023年 2月　2日実施

[I]　次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i)　2 次方程式 $x^2+2kx+4k-3=0$ は 2 つの実数解 α, β をもつとする。ただし，$\alpha<\beta$ とする。このとき，k の値の範囲は $\boxed{(\ 1\ )}$ である。また，$\beta \leqq k$ となるような k の値の範囲は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(ii)　3 個のさいころ A, B, C を 1 回ずつ投げる。さいころ A の出た目が 4 であり，かつ 3 個のさいころの出た目の最大値が 4 である確率は $\boxed{(\ 3\ )}$ である。3 個のさいころの出た目の最大値が 4 であるときに，さいころ A の出た目が 4 である確率は $\boxed{(\ 4\ )}$ である。

(iii)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(9x^2+36x+34\right)^n$ が収束するような x の値の範囲は $\boxed{(\ 5\ )}$ であり，この無限級数の和が 2 のとき，x の値は $\boxed{(\ 6\ )}$ である。

解答

(1) $k<1,\ 3<k$　(2) $\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} \leqq k<1,\ 3<k$　(3) $\dfrac{2}{27}$　(4) $\dfrac{16}{37}$

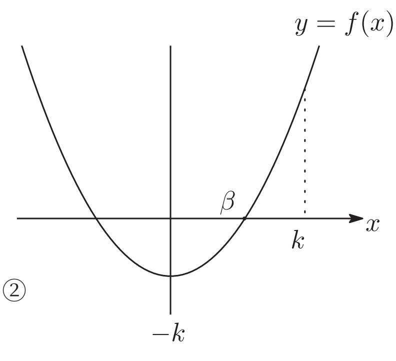
(5) $\dfrac{-6-\sqrt{3}}{3}<x<-\dfrac{7}{3},\ -\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{-6+\sqrt{3}}{3}$　(6) $\dfrac{-18\pm 2\sqrt{6}}{9}$

解説

(i)　$x^2+2kx+4k-3=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であればよい.

$$D/4=k^2-4k+3=(k-1)(k-3)>0 \iff \boldsymbol{k<1,\ 3<k}\cdots①$$

$f(x)=x^2+2kx+4k-3$ とおく．$\beta \leqq k$ となるためには，
$D>0$ かつ $f(k) \geqq 0$ かつ 軸 $<k$ であればよい.



$$f(k) \geqq 0 \iff 3k^2+4k-3 \geqq 0 \iff k \leqq \frac{-2-\sqrt{13}}{3},\ \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \leqq k\cdots②$$

かつ，軸について

$$x=-k<k \iff k>0\cdots③$$

が得られるので ①, ②, ③ より求める k の値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} \leqq k<1,\ 3<k}$ である.

別解

(2) については以下のように考えてもよい．

$\beta=-k+\sqrt{k^2-4k+3}$ であるので，

$$-k+\sqrt{k^2-4k+3}\leqq k \iff \sqrt{k^2-4k+3}\leqq 2k$$

を考える．ここで $k>0$ であることに注意して両辺を 2 乗すると，

$$k^2-4k+3\leqq 4k^2 \iff 3k^2+4k-3\geqq 0 \iff k\leqq\frac{-2-\sqrt{13}}{3},\ \frac{-2+\sqrt{13}}{3}\leqq k$$

以上より求める k の値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}\leqq k<1,\ 3<k}$ である．

(ii) さいころ A の出た目が 4 で，さいころ B，C の出た目は 1，2，3，4 のいずれかであればよいので，

$$\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$

さいころ A の出た目が 4 であるという事象を X，3 個のさいころの出た目の最大値が 4 であるという事象を Y とすると，(3) より $P(X\cap Y)=\dfrac{2}{27}$．また，

$$P(Y)=(\text{最大値が 4 以下})-(\text{最大値が 3 以下})=\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}$$

よって，求める確率は

$$P_Y(X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{\dfrac{2}{27}}{\dfrac{37}{216}}=\boldsymbol{\frac{16}{37}}$$

(iii) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n$ が収束する条件は，$-1<9x^2+36x+34<1$ が成り立つことである．

$$-1<9x^2+36x+34 \iff x<-\frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}<x$$
$$9x^2+36x+34<1 \iff \frac{-6-\sqrt{3}}{3}<x<\frac{-6+\sqrt{3}}{3}$$

となるので，無限級数が収束する x の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{-6-\sqrt{3}}{3}<x<-\frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}<x<\frac{-6+\sqrt{3}}{3}}$$

と求まる．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n=\frac{9x^2+36x+34}{1-(9x^2+36x+34)}$$

となるので，これが 2 となるとき，

$$\frac{9x^2+36x+34}{1-(9x^2+36x+34)}=2$$
$$\iff 9x^2+36x+34=\frac{2}{3}$$
$$\iff x=\boldsymbol{\frac{-18\pm2\sqrt{6}}{9}}$$

となる．

[II] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当(がいとう)欄に記入せよ。

(i) 3 次方程式 $8x^3-8x^2+1=0$ の解は $x=\boxed{(1)}$ である。また，不等式

$(\log_x 2)\left|\log_2|x-1|\right|+\left|\log_x 8\right|-2 \geqq 0$ の解は $\boxed{(2)}$ である。

(ii) 座標空間において，3 点 A(1, 3, 0), B(0, −1, −3), C(2, 4, 1) が定める平面を α とし，D(0, 6, −3) とする。このとき，α に関して D と対称な点 E の座標は $\boxed{(3)}$ である。ただし，E が α に関して D と対称であるとは，直線 DE は α に垂直であり，かつ線分 DE の中点は α 上にあることをいう。また，F(1, 1, 1) とするとき，α 上の点 P で，2 線分 DP, FP の長さの和 DP + FP を最小にする P の座標は $\boxed{(4)}$ である。

解答

(1) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$ (2) $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{4},\ 1<x\leqq 4+2\sqrt{2}$ (3) $(-2,\ 2,\ 3)$ (4) $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

解説

(i) $8x^3-8x^2+1=(2x-1)\left(4x^2-2x-1\right)=0$ なので $x=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}}\cdots(*)$.

与不等式から真数条件，底の条件より $0<x<1,\ x>1$ である．

$$(\log_x 2)\left|\log_2|x-1|\right|+\left|\log_x 8\right|-2\geqq 0 \iff \frac{1}{\log_2 x}\left|\log_2|x-1|\right|+\left|\frac{3}{\log_2 x}\right|-2\geqq 0\cdots①$$

(a) $x>1$ のとき，① の両辺に $\log_2 x(>0)$ をかけることにより ($|x-1|=x-1$ にも注意)

$$\left|\log_2(x-1)\right|+3-2\log_2 x\geqq 0\cdots②$$

- $x\geqq 2$ のとき，$\log_2(x-1)\geqq 0$ であるから，

$$② \iff \log_2(x-1)+3-2\log_2 x\geqq 0 \iff \frac{8(x-1)}{x^2}\geqq 1 \iff x^2-8x+8\leqq 0$$

これより $2\leqq x<4+2\sqrt{2}$ が解となる．

- $1<x<2$ のとき，$\log_2(x-1)<0$ であるから，

$$② \iff -\log_2(x-1)+3-2\log_2 x\geqq 0 \iff \frac{8}{x^2(x-1)}\geqq 1$$

これは $1<x<2$ で成り立つので，$1<x<2$ が解となる．

(b) $0<x<1$ のとき，① の両辺に $\log_2 x(<0)$ をかけることにより ($\log_2|x-1|=\log_2(1-x)<0$ にも注意)

$$\begin{aligned}① &\iff \left|\log_2(1-x)\right|-3-2\log_2 x\leqq 0\\ &\iff -\log_2(1-x)-3-2\log_2 x\leqq 0\\ &\iff \log_2(1-x)+3+2\log_2 x\geqq 0\\ &\iff \log_2\left\{8x^2(1-x)\right\}\geqq 0\\ &\iff 8x^3-8x^2+1\leqq 0\cdots③\end{aligned}$$

ここで $(*)$ を利用することにより ③ $\iff x\leqq\dfrac{1-\sqrt{5}}{4},\ \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ を得る．$0<x<1$ と合わせて $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ が解となる．

以上より $\boldsymbol{\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4},\ 1 < x \leqq 4+2\sqrt{2}}$ である.

(ii) 線分 DE の中点を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{DH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 0 \end{cases} \cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DA}} = (1,\ -3,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ -4,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 1,\ 1)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 26,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 3,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -8,\ \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2,\ \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1$$

なので，① より

$$\begin{cases} 13s - 4t + 1 = 0 \\ 8s - 3t - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 2\overrightarrow{\mathrm{DH}} = (-2,\ 2,\ 3)$$

なので，$\mathrm{E}\boldsymbol{(-2,\ 2,\ 3)}$ とわかる.

点 D と点 F が，平面 α に関して同じ側にあると仮定する．すると，求める点 P は，線分 EF と平面 α の交点であり，点 P は線分 EF の内分点となる.

点 P は線分 EF 上の点だから，$0 < k < 1$ となる k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} + k\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdots ②$$

と表せるが，点 P は平面 α 上の点でもあるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots ③$$

と表すことができる．②，③ を成分比較した連立方程式を解くと $k = -1$ となり，これは点 D と点 F が，平面 α に関して同じ側にあるとした仮定が誤りであることを示す.

したがって求める点 P は，線分 DF と平面 α の交点であり，②，③ と同様に考えて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} + k\overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{AB}} + m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を成分比較した連立方程式を解くことで $k = \dfrac{1}{3}$ が得られ，$\mathrm{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)}$ とわかる.

[III]（記述問題）

関数 $f(x) = 4\tan^3 x - 9\tan^2 x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = a$ で極大であるとする。座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点の座標を $(b, f(b))$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(i) 実数 a，b の値を求めよ。

(ii) 座標平面上で，連立不等式 $\begin{cases} f(x) \leqq y \leqq 0 \\ a \leqq x \leqq b \end{cases}$ の表す領域の面積を求めよ。

解答

(i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (12\tan^2 x - 18\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (12\tan^2 x - 18\tan x)(1 + \tan^2 x) \\ &= 12\tan^4 x - 18\tan^3 x + 12\tan^2 x - 18\tan x \end{aligned}$$

である．$f'(x) = 0$ のとき，$\tan x = 0,\ \dfrac{3}{2}$ であるから，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$x = 0,\ \alpha$ である．ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$ を満たし，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ である．

$$\begin{aligned} f''(x) &= (48\tan^3 x - 54\tan^2 x + 24\tan x - 18) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 6(\tan x - 1)(8\tan^2 x - \tan x + 3)(1 + \tan^2 x) \end{aligned}$$

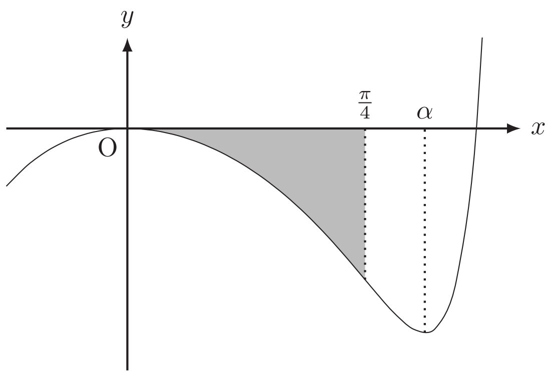
である．$f''(x) = 0$ のとき，$\tan x = 1$ であるから，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$x = \dfrac{\pi}{4}$ である．

よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は次の表のようになる．

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘		↘		↗	

以上より，$x = 0$ で極大であり，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で変曲点となる．ゆえに，$a = \mathbf{0}$，$b = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ である．

(ii) 与えられた連立不等式の表す領域は，右図の灰色の部分となる．



求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-4\tan^3 x + 9\tan^2 x)dx$$

である．

ここで，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$

$$= \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

ゆえに,

$$S = -4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2\right) + 9\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{7 + 2\log 2 - \frac{9}{4}\pi}$$

講評

［I］［小問集合］(i) やや易 (ii) やや易 (iii) やや易

(i) (1) は判別式を用いるだけの基本問題．(2) は 2 次関数のグラフを考えることによって解く．

(ii) 複数個さいころを投げたときの最大値の確率の問題は，しっかり習得しておきたい重要問題．(4) の条件付き確率は公式を用いるだけである．

(iii) 無限等比級数の収束条件についての問題．問われていることは基本的だが，解に無理数が多く出てくるので求められても自信を持てないかもしれない．

［II］［小問集合］(i) やや難 (ii) やや難

(i) (1) の 3 次方程式は確実に正答したい．(2) の場合分けがかなり重く，空所補充で完璧な答を書くことは非常に難しいだろう．

(ii) (3) に関しては典型題で数値も複雑ではないため正答したい．(4) に関しては対称点を用いてその 2 点を結ぶ線分上に距離の和が最小になる点があるという設定が普通だが，本問では D と F は平面 α に関して反対側にあるため，(3) の対称点の E を使うと思いこんでしまうと正解が得られない．その場合，得られた点が線分上にあるかどうかを検証することにより，間違いに気付きたい．

［III］［数学IIIの微積分］（標準～やや難）

本学で頻出の，関数のグラフと求積について考える問題であった．ただ，例年は指数関数・対数関数が題材となることが多いのだが，今回は三角関数を含む関数であった点が目を引く．

(i) 増減と凹凸を調べればよいのだが，$f''(x)=0$ を解くのがやや難しく，ここを突破できるかどうかが全体の鍵．

(ii) $\tan^2 x$ の積分は基本だが，$\tan^3 x$ は苦労した受験生が多いかも知れない．また，(i) が解けなくても定積分の方針だけでも書いて部分点を狙いたい．

昨年に比べ難化した．[I] は比較的解きやすい問題が多いが，[II](i)(ii) それぞれの後半と [III] の難易度が高く，高得点はとりにくい．[I] を完答に近いくらいに仕上げた上で，残りの問題でいかに立ち回れたかの勝負となるだろう．

目標は 60％．