医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

藤田医科大学(ふじた未来入試)　数学

2022年 11月　6日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　7 個の数字 1, 1, 2, 2, 0, 0, 0 を使ってできる 7 桁の正の整数は $\boxed{アイウ}$ 個ある。

(2)　半径が 3 の球に内接する正八面体の体積は $\boxed{エオ}$ である。

(3)　△ABC の周囲の長さが 40, △ABC に内接する円の半径が 4 である。点 Q が $5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ を満たすとき, △QBC の面積は $\boxed{カキ}$ である。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right)=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

(5)　$x^3+7x^2-x-39=0$ の実数解を小さいものから順に a, b, c とするとき,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$$ である。

(6)　$\tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{14}\right)\tan\left(\frac{9\pi}{14}\right)=\boxed{スセ}$ である。

(7)　実数で定義される関数 $y=f(x)=\dfrac{8x^2+5}{x^2-3x+6}$ の最大値を M, 最小値を m とすると

$$\frac{M}{m}=\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$$ である。

(8)　1, 4, 6 の数字を使わない正の整数を小さい数から順に 2, 3, 5, 7, 8, 9, 20, 22, 23, ⋯ のように並べるとき, 2023 は $\boxed{ツテト}$ 番目の数字である。

(9)　xy 平面上の x 軸の正の範囲に点 P, y 軸の正の範囲に点 Q があり, 直線 PQ が点 (1, 8) を通るように動くとき, 点 P と点 Q の距離の 2 乗の最小値は $\boxed{ナニヌ}$ である。

(10)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i}{1+\sqrt{3}i}\right)^5=\boxed{ネ}+\boxed{ノ}i$ である。ただし i は虚数単位である。

解答

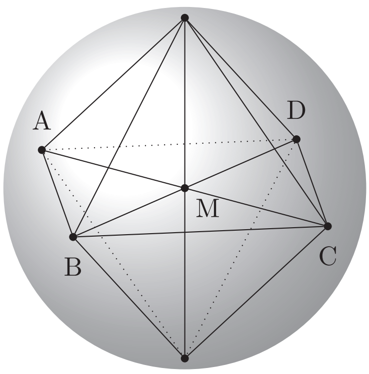
解答記号	正解
アイウ	120
エオ	36
カキ	40
$\dfrac{ク}{ケ}$	$\dfrac{1}{6}$
$\dfrac{コサ}{シ}$	$\dfrac{15}{2}$

解答記号	正解
スセ	-1
$\dfrac{ソタ}{チ}$	$\dfrac{50}{3}$
ツテト	352
ナニヌ	125
ネ, ノ	4, 4

解説

(1)　最高位が 1 のとき，残りの位は 0 が 3 個，1 が 1 個，2 が 2 個の順列を考えて $\dfrac{6!}{2!3!}=60$ 個.
最高位が 2 のときも同様に考えることができるので，求める個数は $60\times 2=\mathbf{120}$ 個である.

(2)　図の AC の中点を M とおく．正八面体が球に内接するとき，AM $=3$ となることを考慮すると，



$$(\text{正八面体の体積})=(\text{ABCD の面積})\times \text{OE}\times\frac{1}{3}=\left(6\times 6\times\frac{1}{2}\right)\times 6\times\frac{1}{3}=\mathbf{36}$$

(3)　△ABC の周囲の長さを s，面積を T，内接円の半径を r とおくと，

$$T=\frac{1}{2}rs=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 40=80$$

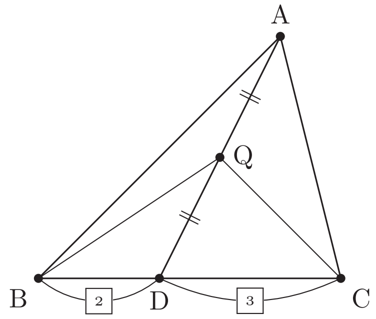
一方,

$$5\overrightarrow{\text{AQ}}+3\overrightarrow{\text{BQ}}+2\overrightarrow{\text{CQ}}=\overrightarrow{0}$$

$$\iff 5\overrightarrow{\text{AQ}}+3\left(\overrightarrow{\text{AQ}}-\overrightarrow{\text{AB}}\right)+2\left(\overrightarrow{\text{AQ}}-\overrightarrow{\text{AC}}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\iff \overrightarrow{\text{AQ}}=\frac{3\overrightarrow{\text{AB}}+2\overrightarrow{\text{AC}}}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\overrightarrow{\text{AB}}+2\overrightarrow{\text{AC}}}{5}$$

と変形できるので，線分 BC を 2 : 3 に内分する点を D とおくと，Q は AD の中点とわかる.



したがって，$\triangle\mathrm{QBC} = \dfrac{1}{2}T = \mathbf{40}$ である．

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nk-k^2}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$= \int_0^1 (x-x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

(5)　3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\begin{cases} a+b+c=-7\cdots ① \\ ab+bc+ca=-1\cdots ② \\ abc=39\cdots ③ \end{cases}$$

と表される．① より，$b+c=-7-a$, $c+a=-7-b$, $a+b=-7-c$ となるので，

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a}{-7-a}+\frac{b}{-7-b}+\frac{c}{-7-c}$$
$$= -\frac{a(b+7)(c+7)+b(a+7)(c+7)+c(a+7)(b+7)}{(a+7)(b+7)(c+7)}$$
$$= -\frac{3abc+14(ab+bc+ca)+49(a+b+c)}{abc+7(ab+bc+ca)+49(a+b+c)+343}$$

これに ①〜③を代入して，

$$(\text{与式}) = -\frac{117-14-343}{39-7-343+343} = \frac{240}{32} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}$$

(6)　$\theta = \dfrac{5\pi}{14}$ とすると与式は，

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\tan\theta\cdot\tan(\pi-\theta) = \frac{1}{\tan^2\theta}\cdot\tan\theta\cdot(-\tan\theta) = \mathbf{-1}$$

(7)　$y=f(x)$ の分母は $x^2-3x+6=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0$ であるので x はすべての実数値をとる．このとき，$\dfrac{8x^2+5}{x^2-3x+6}=k$ とおくと，

$$\frac{8x^2+5}{x^2-3x+6}=k \iff (k-8)x^2-3kx+6k-5=0\cdots ①$$

x はすべての実数値をとることから，$k \fallingdotseq 8$ のとき①の判別式を D とすると，$D \geqq 0$ を満たせばよい．

$$D=9k^2-4(k-8)(6k-5)\geqq 0 \iff (5k-4)(3k-40)\leqq 0 \iff \frac{4}{5}\leqq k\leqq\frac{40}{3}\,(k \fallingdotseq 8)$$

$k=8$ のとき①は $-24x+43=0 \iff x=\dfrac{43}{24}$ より $k=8$ も適する．以上より，$M=\dfrac{40}{3}$，$m=\dfrac{4}{5}$ が求まるので $\dfrac{M}{m}=\mathbf{\dfrac{50}{3}}$.

(8)　1 桁の数は 2, 3, 5, 7, 8, 9 の 6 通り

2 桁の数は 十の位が 2, 3, 5, 7, 8, 9 の 6 通り，一の位はそれに 0 を加えて 7 通り

3 桁の数は 百の位が 2, 3, 5, 7, 8, 9 の 6 通り，十と一の位はそれに 0 を加えて各 7 通り存在する．

4 桁の数の最初は 2000 であるので 2023 は 4 桁の数の最初から数えて $7+3=10$ 番目である．したがって，$6+6\cdot 7+6\cdot 7^2+10=\mathbf{352}$ 番目の数字である．

別解

$$0\to 0,\ 2\to 1,\ 3\to 2,\ 5\to 3,\ 7\to 4,\ 8\to 5,\ 9\to 6$$

の置き換えによりこの数列は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11,\ 12,\ \cdots$$

となるが，これは自然数を 7 進法で小さい順に並べたものである．2023 はこの置き換えにより 1012 となるので，7 進法で表された $1012_{(7)}$ が 10 進法で何かを調べるとよい．

$$1012_{(7)}=1\cdot 7^3+0\cdot 7^2+1\cdot 7+2=352$$

なので，2023 は **352** 番目の数字である．

(9)　直線 PQ の方程式を $y=m(x-1)+8\ (m<0)$ とおく．このとき $\mathrm{P}\left(1-\dfrac{8}{m},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 8-m)$ であるから，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(1-\frac{8}{m}\right)^2+(8-m)^2$$

となる．これを $f(m)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(m)&=2\left(1-\frac{8}{m}\right)\cdot\frac{8}{m^2}-2(8-m)\\ &=\frac{2(m-8)(m+2)(m^2-2m+4)}{m^3} \end{aligned}$$

となるので，$f(m)$ の増減は次のようになる．

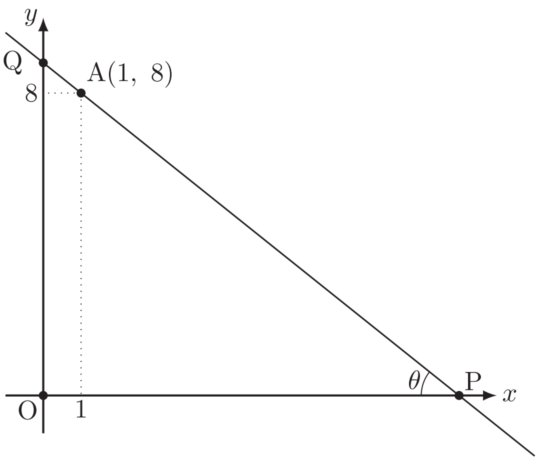
m	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(m)$	$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\searrow$	125	$\nearrow$	

したがって，$f(m)$ の最小値，すなわち PQ^2 の最小値は **125** である．

別解

線分 PQ の長さを r とし，$\angle\mathrm{OPA}$ の大きさを θ

$\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．このとき，



$$\mathrm{AP} = \frac{8}{\sin\theta},\ \mathrm{AQ} = \frac{1}{\cos\theta}$$

であるので，

$$r = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{\sin\theta}$$

と表すことができる．

ここで $f(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{8}{\sin\theta}$ とすると，

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{8\cos\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{\sin^3\theta - 8\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ &= \frac{\tan^3\theta - 8}{\sin\theta\tan\theta} \\ &= \frac{(\tan\theta - 2)(\tan^2\theta + 2\tan\theta + 4)}{\sin\theta\tan\theta} \end{aligned}$$

$\tan\theta = 2$ を満たす θ を $\theta = \alpha$ とすると，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であり，増減表は次のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	∞	$\searrow$	$5\sqrt{5}$	$\nearrow$	∞

したがって， $r = f(\theta)$ の最小値は $5\sqrt{5}$ であるので，r^2 の最小値は **125** である．

(10)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)i}{1 + \sqrt{3}i} &= \frac{\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \\ &= -1 - i \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1)i}{1 + \sqrt{3}i}\right)^5 &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\right\}^5 \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25}{4}\pi + i\sin\frac{25}{4}\pi\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \boldsymbol{4 + 4i} \end{aligned}$$

問題 2

次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　a, b が有理数であるとき，$a+b\sqrt{3}=0$ が $a=b=0$ の必要十分条件であることを示せ。

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ。

解答

(1)　背理法で証明する．$\sqrt{3}$ が有理数だと仮定して，$\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な正の整数）とおく．このとき

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\Longrightarrow 3q^2=p^2$$

となるので，p は 3 の倍数でなければならない．そこで $p=3p'$ (p' は正の整数) とおくと

$$3q^2=p^2 \iff 3q^2=(3p')^2 \iff q^2=3(p')^2$$

となり，q が 3 の倍数でなければならない．これは $p,\ q$ が互いに素という仮定に反する．以上により証明された．　（証明終）

(2)　$a,\ b$ が有理数のとき $a+b\sqrt{3}=0 \iff a=b=0$ であることの証明

($\Longleftarrow$ について)

$a=b=0$ のとき明らかに $a+b\sqrt{3}=0$ である．

($\Longrightarrow$ について)

$b\neq 0$ のとき $a+b\sqrt{3}=0$ より $\sqrt{3}=-\dfrac{a}{b}$ となる．これは $\sqrt{3}$ が有理数であることを意味し，(1) に矛盾する．したがって $b=0$ であり，その場合 $a=0$ もしたがう．　（証明終）

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数とすると，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ （a は正の有理数） とおける．この場合

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a\Longrightarrow 2=(a-\sqrt{3})^2 \iff 2a\sqrt{3}+(-a^2-1)=0$$

となるが，$2a,\ -a^2-1$ はともに有理数なので，(2) により $2a=-a^2-1=0$ でなければならない．これは不可能である．よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．　（証明終）

別解

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a\Longrightarrow 2=(a-\sqrt{3})^2 \iff \sqrt{3}=\frac{a^2+1}{2a}$$

となり，左辺の $\sqrt{3}$ が無理数，右辺の $\dfrac{a^2+1}{2a}$ が有理数となって矛盾する．よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．
（証明終）

問題３

点 A，B，C，T が線で結ばれた図 1 のような経路がある。この経路上を点 P が 1 秒ごとに以下のような確率で動く。

・ 点 A から点 B，C，T に動く確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ である。
・ 点 T から点 A に動く確率は $\frac{1}{3}$，点 T から右向きに出て反時計回りに動いて点 T に戻る確率は $\frac{1}{3}$，左向きに出て時計回りに動いて点 T に戻る確率は $\frac{1}{3}$ である。
・ 点 B から点 A に動く確率，点 C から点 A に動く確率は，どちらも 1 である。

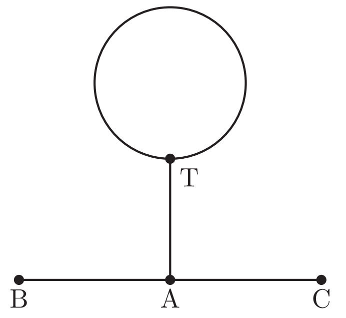


図 1

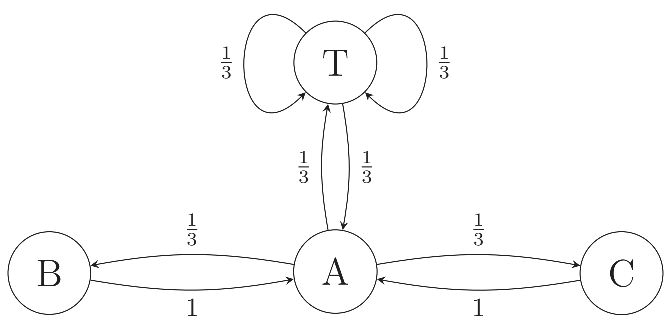
最初，点 P が点 A にあるとする。n 秒後に点 P が点 A，B，C，T にある確率をそれぞれ a_n．b_n，c_n，t_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし n は正の整数とする。

(1)　a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
(2)　a_{n+1} を b_n, c_n, t_n を用いて表せ。
(3)　a_n, a_{n+1}, a_{n+2} の間の関係式を求めよ。
(4)　$n \to \infty$ における a_n の極限値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{7}{9},\ a_3 = \dfrac{2}{27},\ a_4 = \dfrac{53}{81}$
(2)　$a_{n+1} = b_n + c_n + \dfrac{1}{3}t_n$
(3)　$9a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n - 3 = 0$
(4)　$\dfrac{3}{8}$

$\boxed{\text{解説}}$



(1)　a_n，b_n，c_n，t_n に関する漸化式は次のようになっている.

$$a_{n+1} = b_n + c_n + \frac{1}{3}t_n \qquad \cdots①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \qquad \cdots②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \qquad \cdots③$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}t_n \qquad \cdots④$$

$(a_1,\ b_1,\ c_1,\ t_1) = \left(\mathbf{0},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ から始めて計算していくと

$$\begin{aligned}(a_2,\ b_2,\ c_2,\ t_2) &= \left(\boldsymbol{\frac{7}{9}},\ 0,\ 0,\ \frac{2}{9}\right)\\(a_3,\ b_3,\ c_3,\ t_3) &= \left(\boldsymbol{\frac{2}{27}},\ \frac{7}{27},\ \frac{7}{27},\ \frac{11}{27}\right)\\(a_4,\ b_4,\ c_4,\ t_4) &= \left(\boldsymbol{\frac{53}{81}},\ \frac{2}{81},\ \frac{2}{81},\ \frac{8}{27}\right)\end{aligned}$$

がわかる．

(2) (1) で書いたように $\boldsymbol{a_{n+1} = b_n + c_n + \frac{1}{3}t_n}$ である．

(3) 明らかに $a_n + b_n + c_n + t_n = 1$ であるから $b_n + c_n = 1 - a_n - t_n$ である．これを ① に代入して

$$\begin{aligned}&a_{n+1} = b_n + c_n + \frac{1}{3}t_n = (1 - a_n - t_n) + \frac{1}{3}t_n = 1 - a_n - \frac{2}{3}t_n\\&\therefore\ t_n = \frac{3}{2}(1 - a_{n+1} - a_n)\end{aligned}$$

これを ④ に代入する．

$$\begin{aligned}&t_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}t_n\\\iff &\frac{3}{2}(1 - a_{n+2} - a_{n+1}) = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}(1 - a_{n+1} - a_n)\\\iff &9(1 - a_{n+2} - a_{n+1}) = 2a_n + 6(1 - a_{n+1} - a_n)\\\iff &\boldsymbol{9a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n - 3 = 0}\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すると仮定して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とおく．(3) の結果の両辺の極限を考えると

$$\lim_{n\to\infty}(9a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n - 3) = 0 \iff 9a + 3a - 4a - 3 = 0 \iff a = \frac{3}{8}$$

収束することは次のように証明できる．$a_n - \dfrac{3}{8} = s_n$ とおくと

$$\begin{aligned}&9a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n - 3 = 0\\\iff &9\left(a_{n+2} - \frac{3}{8}\right) + 3\left(a_{n+1} - \frac{3}{8}\right) - 4\left(a_n - \frac{3}{8}\right) = 0\\\iff &9s_{n+2} + 3s_{n+1} - 4s_n = 0\end{aligned}$$

特性方程式 $9x^2 + 3x - 4 = 0$ の二解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると $-1 < \alpha < \beta < 1$ であることが確かめられる．この $\alpha,\ \beta$ を用いると

$$s_{n+2} - \alpha s_{n+1} = \beta(s_{n+1} - \alpha s_n) = \cdots = \beta^n(s_2 - \alpha s_1) \to 0 \qquad \cdots⑤$$

$$s_{n+2} - \beta s_{n+1} = \alpha(s_{n+1} - \beta s_n) = \cdots = \alpha^n(s_2 - \beta s_1) \to 0 \qquad \cdots⑥$$

⑤ − ⑥ により $(\beta - \alpha)s_{n+1} \to 0$．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ であることが証明された．

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$ ．

講評

問題 1［小問集合］((1) 易 (2) やや易 (3) 標準 (4) 易 (5) やや易 (6) 標準 (7) やや難 (8) 標準 (9) 標準 (10) 標準)

前半は昨年並みの難易度であり，落とせない．後半は難易度が上がり，差がついたと思われる．(7) は微分して増減を調べても解けるが，計算量がかなり多く挫折した受験生も多かったのではないか．(9) は直線の傾きをパラメータとするか角度を設定して PQ を表せばよいのだが，そういった発想ができるかどうかで差がついただろう．それ以外の設問も一筋縄ではいかないものが多く，時間管理の能力も求められる．

問題 2［無理数であることの証明］（標準）

(1) は無理数であることの典型的な証明問題であり，ほとんどの人が習ったことがあるだろう．(2) は (1) を利用する．必要十分条件の証明は 2 つの命題を証明する必要があることに留意が必要．(3) の証明も背理法である．$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数と仮定して (1) または (2) に矛盾することを導く．どれも慣れていればほとんど悩むことなく解答できるはずである．

問題 3［確率漸化式］（やや難）

典型的な確率漸化式の問題ではあるが，状態の数が多いので途中で事故を起こしてしまった受験生も多かったかもしれない．しっかり状態遷移図をかくことが大切である．また，(4) において (3) で得られた漸化式を解こうとすると大変であるが，極限だけならすぐに求められることから効率よくやりたい．

小問集合は例年に比べると難易度の差が激しかった．とるべき問題を見極める力も必要とされた．解法の選択で大きく差がつく問題もいくつかあったため上手な立ち回りが要求された．大問については，問題 2 を確実にとることが重要である．問題 3 の後半を突破すればかなり有利になるだろう．1 次合格のための目標点は 60%．