解答速報

大阪医科薬科大学（後期）　数学

2023年3月10日実施

〔1〕 関数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とし，任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1) $f(x)$ の増減，凹凸を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ の変曲点における接線と曲線 $y=f(x)$，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ から曲線 $y=f(x)$ に 3 本の接線を引くことができるとき，実数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

(1) $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，$f''(x)=\dfrac{x-2}{e^x}$ より $f'(x)=0$ を解くと $x=1$，$f''(x)=0$ を解くと $x=2$ であるから，$f(x)$ の増減，および凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{1}{e}$		$\frac{2}{e^2}$	

つまり，**$x<2$ において上に凸，$x>2$ において下に凸**である．

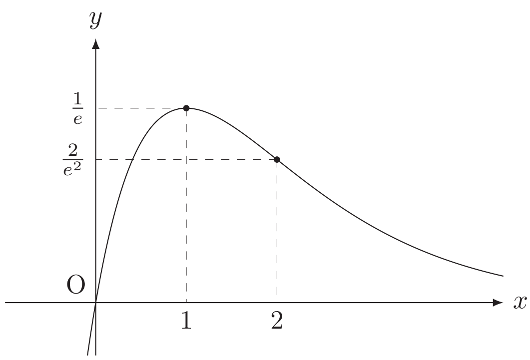
また，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$$

および任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ であることから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

が成り立つので，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる．

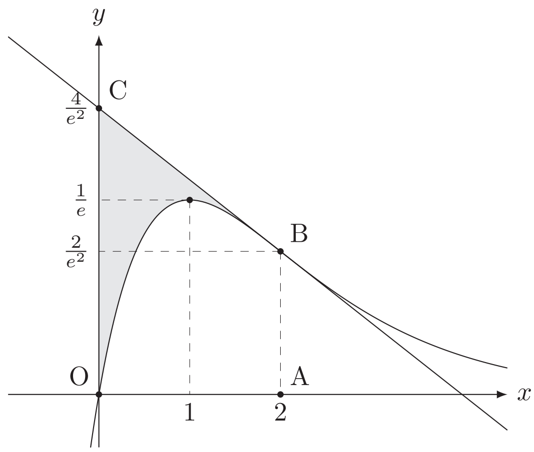


(2) 変曲点の座標は $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ であり，この点における接線の傾きは $-\dfrac{1}{e^2}$ であるから，変曲点における接線の方程式は

$$y=-\frac{1}{e^2}(x-2)+\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$

である．

したがって，右図の灰色部分の面積が求めるものであるから，



$$
\begin{aligned}
&(\text{台形 OABC}) - \int_0^2 xe^{-x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e^2}+\frac{4}{e^2}\right)\cdot 2 - \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{9}{e^2} - 1}
\end{aligned}
$$

(3)　$y=f(x)$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t}{e^t}\right)$ における接線の方程式は

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1-t}{e^t}(x-t)+\frac{t}{e^t} \\
&= \frac{1-t}{e^t}x + \frac{t^2}{e^t} \cdots ①
\end{aligned}
$$

である．これが点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ を通るとき，① に $x=0,\ y=a$ を代入した t についての方程式

$$a = \frac{t^2}{e^t} \cdots ②$$

が解をもつ．$y=\dfrac{x}{e^x}$ のグラフには複接線は存在しないことから，曲線上の点とその点における接線は 1 : 1 に対応するので，方程式 ② が異なる解を 3 つもてばよい．したがって，以下では $y=a$ と $y=\dfrac{t^2}{e^t}$ ($=g(t)$ とおく) のグラフが共有点を 3 つもつための a についての条件を求める．$g'(t)=\dfrac{t(2-t)}{e^t}$ より $g'(t)=0$ を解くと $t=0,\ 2$ であるから，$g(t)$ の増減は次のようになる．

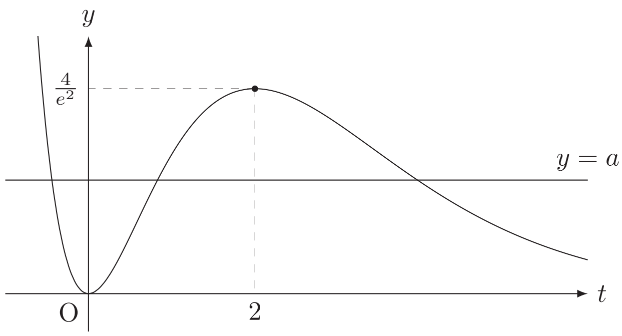
t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

また，

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{e^t} = \infty$$

および任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ であることから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0$$



が成り立つので，$y=g(t)$ および $y=a$ のグラフは上図のようになる．したがって，求める a の値の範囲は $\boldsymbol{0 < a < \dfrac{4}{e^2}}$ である．

注釈

(1) で得られた $y=f(x)$ のグラフの凹凸を考慮すると，y 軸上の点から $y=f(x)$ のグラフに引ける接線の本数が 3 本となるのは，その y 座標が 0 より大きく，変曲点における接線の y 切片 $\left(\text{本問の場合は}\dfrac{4}{e^2}\right)$ より小さい範囲にあるときであることが読み取れる．

〔2〕 連続関数 $f(x)$ は次の 2 つの条件 (i) と (ii) を満たしている。

(i) $f(0)=1$

(ii) 任意の実数 x に対して，$\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = a\sin x + b\cos x$ が成り立つ。

(1) 定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) $g(x)=f(x)-\cos x$ とすると，$g(-x)=-g(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) $x>0$ のとき，$\displaystyle\int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2dt \geqq \int_{-x}^{x}\cos^2 t\,dt$ が成り立つことを示し，等号が成立する条件を求めよ。

解答

(1)

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = a\sin x + b\cos x$$

の両辺に $x=0$ を代入して，$\boldsymbol{b=0}$．また，この式の両辺を x で微分すると

$$f(x)+f(-x)=a\cos x - b\sin x$$

となり，この式の両辺に $x=0$ を代入すると，

$$2f(0)=a$$

これと $f(0)=1$ より，$\boldsymbol{a=2}$ である．

(2) (1) より，

$$f(x)+f(-x)=2\cos x \iff f(-x)=2\cos x - f(x)$$

である．よって，

$$\begin{aligned} g(-x) &= f(-x)-\cos(-x) \\ &= 2\cos x - f(x) - \cos x \\ &= -f(x)+\cos x \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

（証明終）

(3) (2) より，

$$g(-x)\cos(-x) = -g(x)\cos x$$

なので，$g(x)\cos x$ は奇関数だから

$$\int_{-x}^{x} g(t)\cos t\,dt = 0$$

である．よって，

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2\,dt - \int_{-x}^{x}\cos^2 t\,dt \\ =\ &\int_{-x}^{x}\{(g(t)+\cos t)^2 - \cos^2 t\}\,dt \\ =\ &\int_{-x}^{x}\{(g(t))^2 + 2g(t)\cos t\}\,dt \\ =\ &\int_{-x}^{x}\{g(t)\}^2\,dt \geqq 0 \end{aligned}$$

より $\displaystyle\int_{-x}^{x}\{f(t)\}^2dt \geqq \int_{-x}^{x}\cos^2 t\,dt$ が成り立つ．（証明終）

等号が成立する条件は，恒等的に $g(x)=0$ であること，すなわち $\boldsymbol{f(x)=\cos x}$ である．

〔3〕 O を原点とする座標平面上において，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ の $y>0$ を満たす部分を C とし，$\mathrm{A}(2,\ 0)$ とする。

(1) A を極，x 軸の正の方向を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ を定める。このとき，C の極方程式を求めよ。

(2) 点 P を C 上の動点とする。点 Q が A を始点とする半直線 AP 上の点で，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\dfrac{5}{2}$ を満たしながら動くとき，OQ の最小値を求めよ。

解答

(1) 条件より，$x=2+r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と表される．これを C の式に代入して，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}(2+r\cos\theta)^2+\frac{1}{5}(r\sin\theta)^2=1\\ \iff\ &5(r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta+4)+9r^2(1-\cos^2\theta)=45\\ \iff\ &(9-4\cos^2\theta)r^2+20r\cos\theta-25=0\\ \iff\ &\{(3-2\cos\theta)r+5\}\{(3+2\cos\theta)r-5\}=0\\ \iff\ &r=-\frac{5}{3-2\cos\theta},\ \frac{5}{3+2\cos\theta}\end{aligned}$$

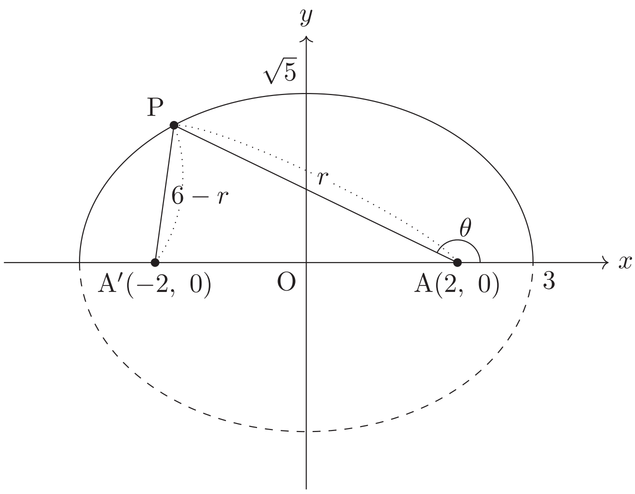
$r>0$ とすると，C の極方程式は $\boldsymbol{r=\dfrac{5}{3+2\cos\theta}\ (0<\theta<\pi)}$ となる．

別解

A は 楕円の焦点であり，もう一つの焦点を A′ とすると，A′(−2, 0) である．△PAA′ について，$\mathrm{AA'}=4$，$\angle\mathrm{PAA'}=\pi-\theta$ であり，また楕円の定義より，$\mathrm{PA}+\mathrm{PA'}=6$ であるので，$\mathrm{PA'}=6-r$ である．よって余弦定理より

$$\begin{aligned}&\mathrm{PA'}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AA'}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AA'}\cos\angle\mathrm{PAA'}\\ \iff\ &(6-r)^2=r^2+16-2\cdot r\cdot 4\cos(\pi-\theta)\end{aligned}$$

これより，$\boldsymbol{r=\dfrac{5}{3+2\cos\theta}}$ を得る．



注釈

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ において，離心率 $\left(\dfrac{\text{焦点間距離}}{\text{長軸の長さ}}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$ を e とおくと，焦点の 1 つ

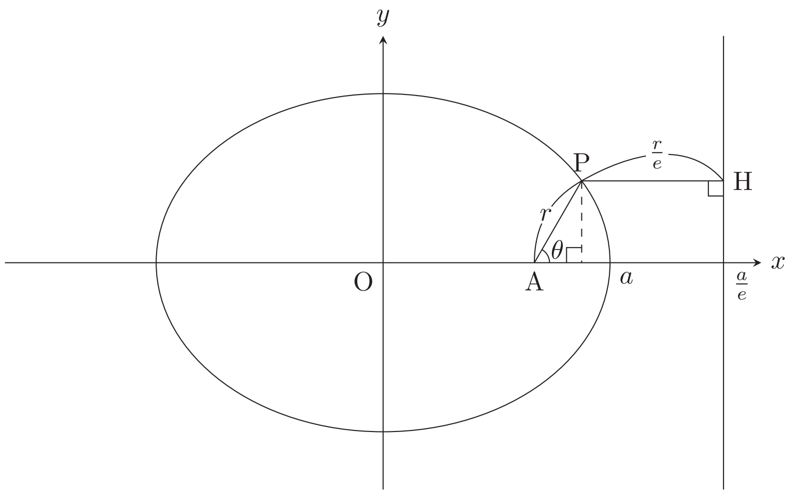
は $(ae, 0)$，対応する準線は $x = \dfrac{a}{e}$ となるので，

$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \frac{a}{e} - ae$$

より，

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

が成り立つ．本問の場合，$a = 3$，$e = \dfrac{2}{3}$ である．



(2)　条件より $\mathrm{AQ} = \dfrac{5}{2r}$ であるので，$\mathrm{Q}\left(2 + \dfrac{5}{2r}\cos\theta,\ \dfrac{5}{2r}\sin\theta\right)$ と表される．よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{OQ}^2 &= \left(2 + \frac{5}{2r}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{5}{2r}\sin\theta\right)^2 \\
&= 4 + \frac{25}{4r^2} + \frac{10}{r}\cos\theta \\
&= 4 + \frac{25}{4}\left(\frac{3+2\cos\theta}{5}\right)^2 + 10\cos\theta\cdot\frac{3+2\cos\theta}{5} \\
&= 5\cos^2\theta + 9\cos\theta + \frac{25}{4} \\
&= 5\left(\cos\theta + \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{11}{5}
\end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ より $-1 < \cos\theta < 1$．よって，$\cos\theta = -\dfrac{9}{10}$ のとき，OQ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{55}}{5}}$ をとる．

別解

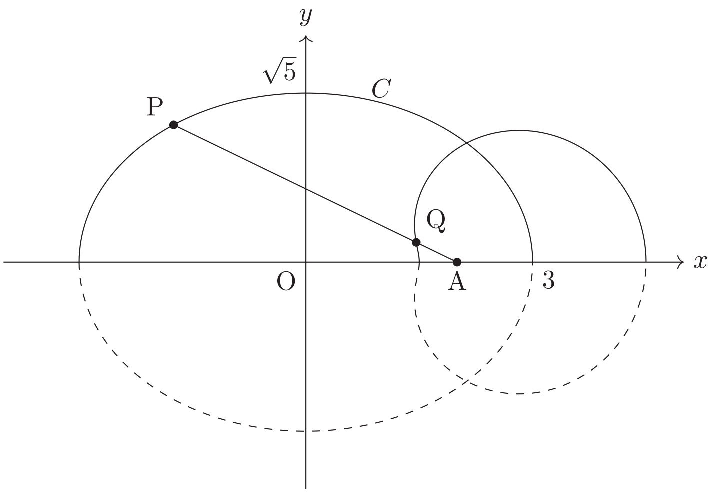
△OAQ について余弦定理より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{OQ}^2 &= \mathrm{AO}^2 + \mathrm{AQ}^2 - 2\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AQ}\cos\angle\mathrm{OAQ} \\
&= 4 + \left(\frac{5}{2r}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\frac{5}{2r}\cos(\pi - \theta) \\
&= 4 + \frac{25}{4r^2} + \frac{10}{r}\cos\theta
\end{aligned}$$

が得られる．あとは本解と同様．

注釈

点 Q の軌跡は図のようになる．



A を定点とする．平面上の A 以外の点 P を，半直線 AP 上の点で $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=$ (一定) を満たす点 Q に移動させる変換は反転と呼ばれる．しかし本問のように楕円を反転させた場合には，きれいな図形になるとは限らない．

的中!!

大阪医科薬科大学後期対策（2/20）

座標平面上の楕円 $(x+1)^2+2y^2=2$ を C とする．

(1)　楕円 C の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて極方程式で表し，r を θ を用いて表せ．ただし，極座標 $(r,\ \theta)$ の極は原点，始線は x 軸の正の部分とする．

〔4〕 座標空間内に 6 点 A$(-1,\ -5,\ 9)$, B$(1,\ -2,\ 3)$, C$(1,\ 19,\ -11)$, D, E, F がある。2 点 D, F は直線 AB 上にあり，四角形 CDEF は正方形である。ただし，3 点 A, D, F はこの順に並んでいるものとする。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 点 D, F の座標を求めよ。

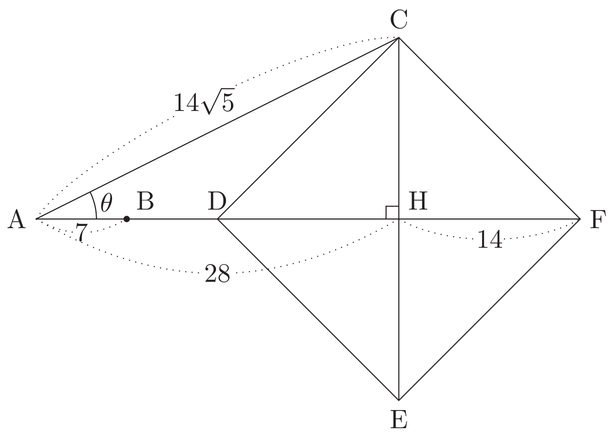
(3) 正方形 CDEF を，直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 3,\ -6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 24,\ -20)$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{1^2+12^2+(-10)^2}=14\sqrt{5}$$

である．



ここで，$\angle\mathrm{CAB}=\theta$ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{4+72+120}{7\cdot 14\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

である．点 C から直線 AB に垂線を下ろしその足を H とすると，$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos\theta=28$ であるから，点 H は線分 AB を $4:3$ に外分する点である．したがって，原点を O とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4-3}\\&=-3(-1,\ -5,\ 9)+4(1,\ -2,\ 3)\\&=(7,\ 7,\ -15)\end{aligned}$$

である．点 E は線分 CH を $2:1$ に外分する点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=2(7,\ 7,\ -15)-(1,\ 19,\ -11)\\&=(13,\ -5,\ -19)\end{aligned}$$

である．ゆえに，点 E の座標は **E$(13,\ -5,\ -19)$** である．

別解

点 C から直線 AB に下ろした垂線の足を H とすると，点 H は直線 AB 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は実数 t を

用いて，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 &\iff (\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ &\iff \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 0 \\ &\iff -196 + 49t = 0 \\ &\iff t = 4\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = (6,\ -12,\ -4)$ となるので，原点を O とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CH}} \\ &= (1,\ 19,\ -11) + 2(6,\ -12,\ -4) \\ &= (13,\ -5,\ -19)\end{aligned}$$

ゆえに，点 E の座標は $\mathbf{E(13,\ -5,\ -19)}$ である．

(2) 四角形 CDEF は正方形であるから，(1) の議論より，CH = DH = FH = 14 である．よって，点 D は線分 AH の中点となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OH}}}{2} \\ &= \left(\frac{-1+7}{2},\ \frac{-5+7}{2},\ \frac{9-15}{2}\right) \\ &= (3,\ 1,\ -3)\end{aligned}$$

である．また，点 F は線分 AH を 3 : 1 に外分する点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{3-1} \\ &= \left(\frac{1+21}{3-1},\ \frac{5+21}{3-1},\ \frac{-9-45}{3-1}\right) \\ &= (11,\ 13,\ -27)\end{aligned}$$

である．ゆえに，点 D, F の座標はそれぞれ $\mathbf{D(3,\ 1,\ -3)}$, $\mathbf{F(11,\ 13,\ -27)}$ である．

(3) 直線 AB は正方形の対角線を含む直線である．考える立体は，底面の半径が 14，高さが 14 の 2 つの円錐の底面を合わせたものであるから，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \times 14^2\pi \times 14 \times 2 \\ &= \boldsymbol{\frac{5488}{3}\pi}\end{aligned}$$

〔5〕 $f(x)$ を整数係数の多項式とする。$f(x)$ が 2 つ以上の定数でない整数係数の多項式の積で表せないとき，$f(x)$ は既約多項式であると呼ぶこととする。例えば，$2x^2+3x+1=(2x+1)(x+1)$ より $2x^2+3x+1$ は既約多項式ではなく，$2x^2+3x+2$ は既約多項式である。

(1) $f(x+1)$ が既約多項式であれば，$f(x)$ も既約多項式であることを示せ。

(2) p は素数とする。$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ （$a_3 \fallingdotseq 0$ かつ a_0, a_1, a_2, a_3 は整数）が次の 3 条件をすべて満たすとき，$f(x)$ は既約多項式であることを示せ。

(i) a_0 は p の倍数であるが，p^2 の倍数でない。

(ii) a_1 と a_2 は p の倍数である。

(iii) a_3 は p の倍数でない。

(3) $f(x)=2x^3+3x^2-6x+4$ が既約多項式であることを証明せよ。

解答

(1) 背理法で示す.「$f(x+1)$ が既約多項式であるが，$f(x)$ が既約多項式でない」と仮定すると，

$$f(x)=g(x)h(x) \qquad (g(x),\ h(x) \text{ は定数でない整数係数の多項式})$$

と表すことができる．このとき，

$$f(x+1)=g(x+1)h(x+1)$$

と表すことができるので，$f(x+1)$ が既約多項式であることに矛盾する．よって示された． （証明終）

(2) 背理法で示す.「$f(x)$ が既約多項式でない」と仮定すると，1 次と 2 次の整数係数の多項式を用いて，

$$f(x)=(b_1x+b_0)(c_2x^2+c_1x+c_0)$$

$$(b_1 \fallingdotseq 0,\ c_2 \fallingdotseq 0,\ b_0,\ b_1,\ c_0,\ c_1,\ c_2 \text{は整数})$$

と表すことができる．このとき，

$$f(x)=b_1c_2x^3+(b_1c_1+b_0c_2)x^2+(b_1c_0+b_0c_1)x+b_0c_0$$

となるので，係数比較により

$$\begin{cases} a_3 = b_1c_2 & \cdots ① \\ a_2 = b_1c_1+b_0c_2 & \cdots ② \\ a_1 = b_1c_0+b_0c_1 & \cdots ③ \\ a_0 = b_0c_0 & \cdots ④ \end{cases}$$

を得る．ここで条件より a_0 は p の倍数であるが p^2 の倍数ではないので p が素数であることと ④ より b_0 または c_0 のいずれか一方のみが p の倍数である．以下，p を法として考える．

- $b_0 \equiv 0$ かつ $c_0 \not\equiv 0$ のとき
  $a_1 \equiv 0$ であることから ③ より $b_1c_0 \equiv 0$．つまり $b_1 \equiv 0$ を得る．このとき ① より $a_3 \equiv 0$ となり，a_3 が p の倍数でないという条件に矛盾する．
- $c_0 \equiv 0$ かつ $b_0 \not\equiv 0$ のとき
  $a_1 \equiv 0$ であることから ③ より $b_0c_1 \equiv 0$．つまり $c_1 \equiv 0$ を得る．また，$a_2 \equiv 0$ であることから ② より $b_0c_2 \equiv 0$．つまり $c_2 \equiv 0$ を得る．このとき ① より $a_3 \equiv 0$ となり，a_3 が p の倍数でないという条件に矛盾する．

以上よりいずれの場合も矛盾するため示された． （証明終）

別解

$f(x)$ が既約多項式でないと仮定すると，本解と同様の議論により，$f(x)$ が 1 次式 $lx-m$ を因数にもつことになる．ここで l, m は整数 ($l \fallingdotseq 0$) であり，条件 (iii) から l は p と互いに素である．このとき，方程式 $f(x)=0$ は $x=\dfrac{m}{l}$ を解にもつので，

$$a_3\frac{m^3}{l^3}+a_2\frac{m^2}{l^2}+a_1\frac{m}{l}+a_0=0$$

$$\iff a_3m^3+a_2m^2l+a_1ml^2+a_0l^3=0$$
$$\iff a_2m^2l+a_1ml^2+a_0l^3=-a_3m^3\cdots⑤$$
$$\iff a_3m^3+a_2m^2l+a_1ml^2=-a_0l^3\cdots⑥$$

が成り立つ．⑤ において，条件 (i)(ii) から左辺は p の倍数であるから右辺も p の倍数となる．このことと，条件 (iii) から a_3 は p の倍数ではないことから，m が p の倍数となる．すると ⑥ において，条件 (ii) を考慮すると左辺は p^2 の倍数となり，右辺も p^2 の倍数となる．このことと，l が p と互いに素であることから，a_0 が p^2 の倍数となるが，これは条件 (i) と矛盾する．したがって $f(x)$ は既約多項式である．（証明終）

(3) $f(x)=2x^3+3x^2-6x+4$ に対して，$f(x+1)$ を考えると，

$$\begin{aligned} f(x+1)&=2(x+1)^3+3(x+1)^2-6(x+1)+4\\ &=2x^3+9x^2+6x+3 \end{aligned}$$

となる．これは (2) において，$p=3$ としたときの条件をすべて満たす．よって $f(x+1)$ は既約多項式であることが分かるので (1) より $f(x)$ も既約多項式であることが証明された．（証明終）

注釈

なお，本問の (2) は Eisenstein（アイゼンシュタイン）の既約判定法を 3 次式の場合に証明させるものであった．一般に整数係数の n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\fallingdotseq 0)$ において，素数 p に対して

(i) a_0 は p の倍数であるが，p^2 の倍数ではない．

(ii) a_1，$\cdots$，a_{n-1} は p の倍数である．

(iii) a_n は p の倍数ではない．

を満たすとき，$f(x)$ は既約多項式である．

講評

〔1〕［数学Ⅲの微積分］(標準)

指数関数を含む関数について，増減・凹凸，面積，接線の本数を調べるという典型的な問題．計算も面倒ではなく，完答が必須である．

〔2〕［数学Ⅲの微積分］(やや難)

定積分で表された関数方程式に関する問題．(1) は微分などの定型処理をすればよく，正解したいところである．(2)(3) は，作業自体は面倒ではないが，やや議論が抽象的なので苦戦した受験生も多いだろう．

〔3〕［式と曲線］(やや難)

楕円と極座標に関する問題である．直交座標系と極座標系の変換公式を用いる解法や余弦定理を用いる解法が考えられるが，経験の有無によって点差がつくと思われる．

〔4〕［空間座標］(標準)

与えられた条件から，点の座標と立体の体積を求める問題であった．図形的な解法，ベクトル方程式を用いた解法などが考えられる．空間座標で与えられているが，実際はすべての点が同一平面上にあるので，空間を意識しない方がよいだろう．(3) は，正方形の対角線を軸に回転させてできる立体の体積なので，(1) ができていれば解答できる．

〔5〕［数と式，整数］(難)

アイゼンシュタインの既約判定法を題材とした問題であった．(1) は易しい．背理法を用いて得点したい．(2) も同じく背理法にて係数比較から根気よく検証していくだけなのだが，ここはやや得点しづらかったかもしれない．(3) については (1) と (2) の結果を用いるだけでよいので，それまでの設問ができていなくとも結果を用いて解答しておきたいところである．いずれにせよ証明問題は前問の結果を用いるケースは多いので最後の問題まであきらめずに粘り強く考えたいところである．

2023 年度前期に比べると取り組みやすい問題がやや多いが，大問 5 つのうち 2 つがほぼ証明問題であるなど，例年通り記述力が要求されるセットだった．なお，これまで必ず大問の 1 つが「場合の数と確率」の範囲からの出題だったが，今回はこの範囲からの出題がないのは特筆すべき点である．

〔1〕,〔4〕を完答した上で，〔2〕,〔3〕,〔5〕でどれだけ立ち回れたか，という勝負になるだろう．目標は 60%．

解説動画を配信予定です