解答速報

東海大学医学部　数学

2022年2月3日実施

1 (1)　ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=5$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=7$ を満たすとする．$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ は $t=$ [ア] のとき最小値をとる．

(2)　7 冊の同じノートを A, B, C の 3 人に分けあたえる分け方は [イ] 通りある．ただし，どの人にも少なくとも 1 冊はあたえるものとする．

(3)　方程式 $\sin^2 x+\sin x=k$（k は定数）を考える．$0\leqq x<2\pi$ の範囲で，この方程式が相異なる 4 個の解をもつような定数 k の値の範囲は [ウ] である．

(4)　n, k を自然数で，$k\geqq 2$ とする．k 個の連続する自然数 n, $n+1$, $\cdots$, $n+k-1$ の総和が 50 となる n と k の組は $(n,\ k)=\left([エ],\ [オ]\right)$, $\left([カ],\ [キ]\right)$ の 2 組ある．ただし，[エ] $<$ [カ] とする．

(5)　A $(0,\ -4)$，B $(4,\ 0)$ とし，P を放物線 $y=x^2$ 上の点とするとき，三角形 PAB の面積の最小値は [ク] である．

(6)　整式 $f(x)$ が条件 $f'(x)\left\{f'(x)-\dfrac{3}{2}x\right\}=f(x)+\dfrac{9}{2}x+4$, $f(0)=5$ を満たすとき，$f(x)=$ [ケ] である．

解答

ア．$-\dfrac{7}{25}$　イ．15　ウ．$-\dfrac{1}{4}<k<0$　エ．8　オ．5　カ．11　キ．4　ク．$\dfrac{15}{2}$　ケ．x^2+3x+5

解説

(1)

$$|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2t\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+t^2|\overrightarrow{b}|^2$$

$$=25t^2+14t+9=25\left(t+\frac{7}{25}\right)^2+\frac{176}{25}$$

よって $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ は $t=-\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{25}}$ のときに最小値をとる．

(2)　7 冊の区別のつかないノートを異なる 3 人に分ける場合の数は，7 個の ○ の間のすき間 6 カ所から 2 カ所選んで仕切りを入れる場合の数に等しい．ゆえに ${}_6C_2=\mathbf{15}$ 通り．

(3)　$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ における t の範囲は $-1\leqq t\leqq 1$.
与えられた方程式から，$t^2+t=k$ となるので，

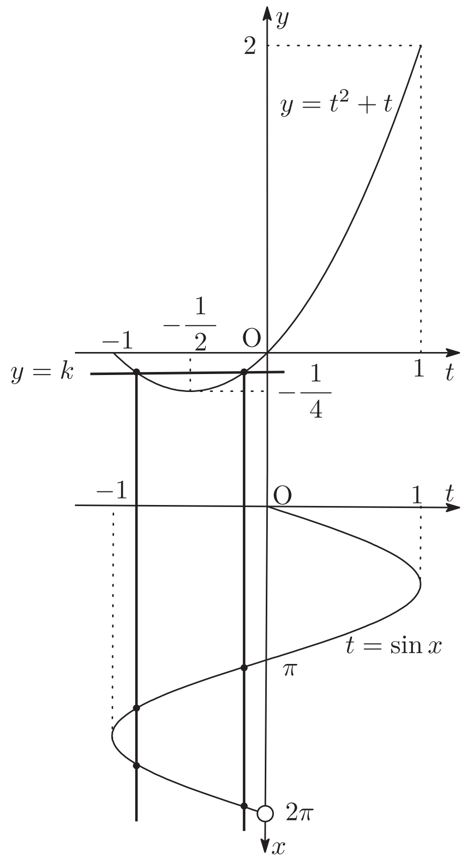
$$\begin{cases} y=k \\ y=t^2+t=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\ (-1\leqq t\leqq 1)\end{cases}$$

の共有点を k の値に対して調べればよい．

t の値に対応する x の個数は,

$$\begin{cases} t = \pm 1 \text{ のとき} & 1\text{ 個} \\ -1 < t < 1 \text{ のとき} & 2\text{ 個} \end{cases}$$

であることに注意して考えると以下のグラフよりこの方程式が異なる 4 個の解をもつような定数 k の値の範囲は $\boldsymbol{-\frac{1}{4} < k < 0}$ である.



(4)　$n,\ n+1,\ \cdots,\ n+k-1$ は等差数列であるので,

$$\begin{aligned} & n + (n+1) + \cdots + (n+k-1) = 50 \\ \iff & \frac{1}{2}k(n+n+k-1) = 50 \\ \iff & k(k+2n-1) = 100 \end{aligned}$$

k と $k+2n-1$ は $2 \leqq k < k+2n-1$ を満たし，さらに偶奇が異なるので,

$$\begin{aligned} & (k,\ k+2n-1) = (5,\ 20),\ (4,\ 25) \\ \iff & (n,\ k) = \mathbf{(8,\ 5),\ (11,\ 4)} \end{aligned}$$

(5)　直線 AB は $y = x - 4$ であるので，$y = x^2$ 上の点 P $(p,\ p^2)$ とすると，三角形 PAB の面積が最小となるのは 点 P における接線が直線 AB と平行になるときである.

$y' = 2x$ より点 P における接線の傾きは $2t$

よって，$2t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$

点 P $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ とわかるので $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{17}{4}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ 4)$ である.

よって三角形 PAB の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{17}{4}\cdot 4\right|=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

線分 AB の長さは $4\sqrt{2}$ で一定であるので，点 P と直線 AB の距離（d とする）の最小値を考えればよい．

$$d=\frac{|-p+p^2+4|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}{\sqrt{2}}$$

であるので $p=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値をとる．このとき三角形 PAB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{15}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}$$

(6)　3 以上の自然数 n について $f(x)$ を n 次式とすると，$f'(x)$ は $n-1$ 次式であるので，左辺は $2n-2$ 次式で右辺は n 次式である．このとき，$2n-2=n$ となるが，$n\geqq 3$ なのでこれは成立しない．

よって，$f(x)$ は高々 2 次式となるので，$f(x)=ax^2+bx+5$ とおく．$f'(x)=2ax+b$ より条件に代入して，

$$(2ax+b)\left\{\left(2a-\frac{3}{2}\right)x+b\right\}=ax^2+\left(b+\frac{9}{2}\right)x+9$$
$$\Longleftrightarrow (4a^2-3a)x^2+\left(4ab-\frac{3}{2}b\right)x+b^2=ax^2+\left(b+\frac{9}{2}\right)x+9$$

これが x についての恒等式であるため，係数比較をすると，

$$\begin{cases} 4a^2-3a=a & \cdots② \\ 4ab-\dfrac{3}{2}b=b+\dfrac{9}{2} & \cdots③ \\ b^2=9 & \cdots④ \end{cases}$$

①, ② から $a=1$, ③ から $b=3$ を得る．このとき ④ も満たす．したがって，$f(x)=\boldsymbol{x^2+3x+5}$ である．

$\boxed{2}$ 自然数 a に対して $f(a)$ を a の正の約数の逆数の総和とする．

(1) $f(28) = \boxed{\text{ア}}$, $f(6000) = \boxed{\text{イ}}$

(2) n を自然数とするとき $f(2^n) = \boxed{\text{ウ}}$, $f(6^n) = \boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 自然数 a が $2 \leqq a \leqq 300$ の範囲を動くとき $f(a)$ は $a = \boxed{\text{オ}}$ において最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

(4) $f(a) = \dfrac{60}{29}$ を満たす自然数を小さい順に 2 つ求めると $a = \boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) $f(a) = \dfrac{315}{143}$ を満たす最小の自然数は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答

ア．2　イ．$\dfrac{403}{125}$　ウ．$2 - \dfrac{1}{2^n}$　エ．$\dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right)\left(3 - \dfrac{1}{3^n}\right)$　オ．293　カ．$\dfrac{294}{293}$

キ．174　ク．812　ケ．1144

解説

自然数 a の素因数分解表示を $a = {p_1}^{n_1} \cdot {p_2}^{n_2} \cdot \cdots \cdot {p_m}^{n_m}$ であるとする．次が成り立つ．

$$f(a) = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{{p_1}^{n_1}}\right) \times \left(1 + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{{p_2}^{n_2}}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{p_m} + \cdots + \frac{1}{{p_m}^{n_m}}\right)$$

$$= \frac{1 - \left(\dfrac{1}{p_1}\right)^{n_1+1}}{1 - \dfrac{1}{p_1}} \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{p_2}\right)^{n_2+1}}{1 - \dfrac{1}{p_2}} \times \cdots \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{p_m}\right)^{n_m+1}}{1 - \dfrac{1}{p_m}}$$

特に a, b が互いに素な自然数であるとき $f(ab) = f(a)f(b)$ であることがわかる．

(1) 計算は次の通り．

$$f(28) = f(2^2)f(7) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{7}{4} \times \frac{8}{7} = \mathbf{2}$$

$$\begin{aligned} f(6000) &= f(2^4)f(3)f(5^3) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right) \\ &= \frac{31}{16} \times \frac{4}{3} \times \frac{156}{125} = \mathbf{\frac{403}{125}} \end{aligned}$$

(2) $f(2^n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \dfrac{1}{2^n}$ である．

また $f(3^n) = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{1}{3^n}\right)$ であるから

$$f(6^n) = f(2^n)f(3^n) = \mathbf{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)}$$

(3) 任意の 2 以上の自然数 a について，$f(a) \geqq 1 + \dfrac{1}{a} > 1$ が成立する．互いに素な 2 以上の自然数 l, m の積で表される数 lm に対しては，$f(lm) = f(l)f(m)$ となるので，このような $f(lm)$ は最小とならない．したがっ

て $f(a)$ を最小にする a は，p を素数，n を自然数として p^n の形で表せる数である．また

$$f(p^n)=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n}$$

より，p を固定したとき $f(p^n)$ を最小にする n は $n=1$ であることがわかるので，$f(a)$ を最小にする a は素数である．

このとき $f(p)=1+\dfrac{1}{p}$ であるから，p の増加に対して $f(p)$ は単調減少となる．したがってなるべく大きい素数を探せばよい．今は $2\leqq a\leqq 300$ でありこれを満たす最大の素数は $a=293$ なので，$f(a)$ は $a=\mathbf{293}$ のとき最小値 $f(293)=\dfrac{\mathbf{294}}{\mathbf{293}}$ をとる．

(4)　$f(a)$ の分母は a の約数であるから，a は 29 の倍数でなければならない．以下，$p,\ q,\ r\ (p<q<r)$ を 29 以外の素数とする．

(i)　$a=29p$ の場合

$f(a)=f(29)f(p)=\dfrac{30}{29}\times\dfrac{p+1}{p}$ である．これが $\dfrac{60}{29}$ だとすると $p=1$ となり不適．

(ii)　$a=29pq$ の場合

$f(a)=f(29)f(p)f(q)=\dfrac{30}{29}\times\dfrac{p+1}{p}\times\dfrac{q+1}{q}$ である．これが $\dfrac{60}{29}$ だとすると

$$\frac{30(p+1)(q+1)}{29pq}=\frac{60}{29}\iff (p+1)(q+1)=2pq\iff (p-1)(q-1)=2$$

これは $(p,\ q)=(2,\ 3)$ を解に持つ．この場合 $a=29pq=174$.

(iii)　$a=29p^2q$ の場合

$$f(a)=\frac{30}{29}\times\frac{p^2+p+1}{p^2}\times\frac{q+1}{q}=\frac{60}{29}\iff (p^2+p+1)(q+1)=2p^2q$$

であるがこれは $(p,\ q)=(2,\ 7)$ を解に持つ．（それ以外に解を持たないことも左辺の大きさを評価するとわかる.）　この場合 $a=29p^2q=29\times 28=812$ である．

(iv)　$a=29pqr$ の場合

この場合 $p\geqq 2,\ q\geqq 3,\ r\geqq 5$ であるが，$p=2,\ q=3,\ r=5$ のとき $pqr=30>28$ であるから，適する a は (iii) の結果よりすべて大きいので不適．

これ以外の場合については，$29^2>29\times 28$ であるから a が 29^2 を約数に持つ場合は考えなくてよい．また $a=29m<29\times 28$ となる場合で上記以外のものは $m=p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^3q$ と表されるが，いずれも解を持たないことが確認できる．以上から，答は $a=\mathbf{174},\ \mathbf{812}$.

(5)　$a=11\times 13\times m$ の形をしているが $m=8$ の場合

$$f(a)=f(11)f(13)f(2^3)=\frac{12}{11}\times\frac{14}{13}\times\frac{15}{8}=\frac{315}{143}$$

で適することがわかる．$m<8$ が不適であることを確認して，答は $a=11\times 13\times 8=\mathbf{1144}$.

$\boxed{3}$ $f(x)=(\log x)^2-\log x$ とし，$y=f(x)$ のグラフを C とする．以下では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ を用いてよい．

(1) 関数 $f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる．また，C の変曲点の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$ である．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(3) 方程式 $f(x)=kx$ が相異なる 3 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) $y=g(x)$ を関数 $y=f(x)$ $\left(x\geqq \boxed{\text{ア}}\right)$ の逆関数とするとき，$g(6)=$ $\boxed{\text{キ}}$ であり，$g'(6)=$ $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) 曲線 C と直線 $y=6$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

解答

ア．$\sqrt{e}$　イ．$-\dfrac{1}{4}$　ウ．$e\sqrt{e}$　エ．$\dfrac{3}{4}$　オ．$3-e$　カ．$0<k<(2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$　キ．e^3　ク．$\dfrac{1}{5}e^3$
ケ．$(2e^6+3e^{-4})\pi$

解説

(1) 真数条件より，定義域は $x>0$ である．$f'(x)=\dfrac{2\log x-1}{x}$ より，$f'(x)=0$ のとき $x=\sqrt{e}$ である．

$f''(x)=\dfrac{3-2\log x}{x^2}$ より，$f'(x)=0$ のとき $x=e\sqrt{e}$ であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

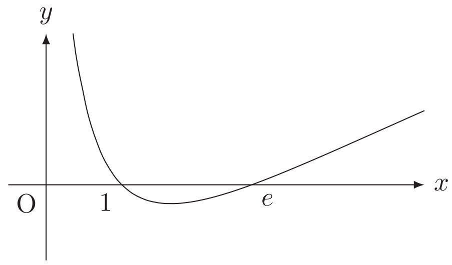
x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

よって，$x=\boldsymbol{\sqrt{e}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ をとる．また，C の変曲点の座標は，$\left(\boldsymbol{e\sqrt{e}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{4}}\right)$ である．

(2) $f(x)=0$ のとき，$\log x=0,\ 1$ より，$x=1,\ e$ である．

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\log x)(\log x-1)=+\infty$$

であるから，曲線 C のグラフは右図のようになる．よって，求める面積を S とすると，



$$S=\int_1^e\{-f(x)\}dx$$
$$=\int_1^e\{\log x-(\log x)^2\}dx$$

ここで，

$$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数})$$

であるから，

$$\int\{\log x-(\log x)^2\}dx=-x(\log x)^2+3(x\log x-x)+C_2\quad(C_2\text{ は積分定数})$$

よって，

$$
\begin{aligned}
S &= \Big[-x(\log x)^2 + 3(x\log x - x) \Big]_1^e \\
&= \{-e + 3(e-e)\} - (-3) \\
&= \boldsymbol{3 - e}
\end{aligned}
$$

(3)　$x>0$ であるから，$f(x)=kx \iff \dfrac{f(x)}{x}=k$ より，$h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと，与えられた方程式が相異なる 3 つの実数解をもつとき，$y=h(x)$ と $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる．よって，$y=h(x)$ のグラフを考える．

$$
h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x} = \frac{-(\log x)^2 + 3\log x - 1}{x^2}
$$

より，$h'(x)=0$ のとき $\log x = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \iff x = e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$ である．

ここで，$\alpha = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$，$\beta = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ とおく．一方，$\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x) = +\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^2}{x}=0$ を用いると，

$$
\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^2}{x}\left(1 - \frac{1}{\log x}\right) = 0
$$

であるから，$h(x)$ の増減表は次のようになる．

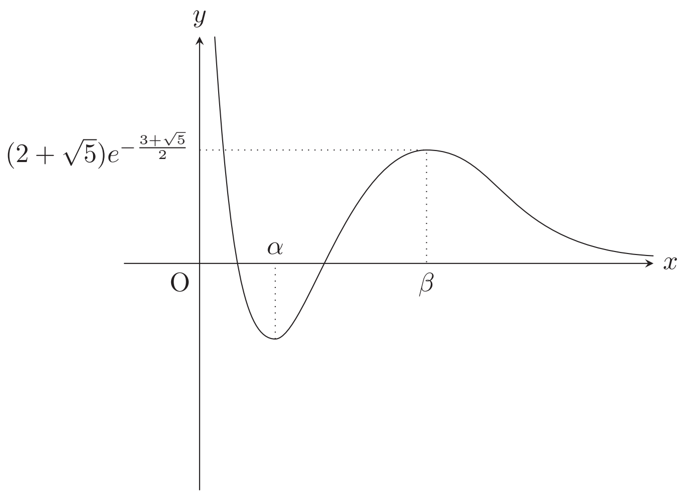
x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$(+\infty)$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$(+\infty)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	(0)

ここで，α，β は $h'(x)=0$ の 2 解であるから，

$$
\begin{aligned}
& (\log\alpha)^2 - 3\log\alpha + 1 = 0 \\
\iff & (\log\alpha)^2 - \log\alpha = 2\log\alpha - 1
\end{aligned}
$$

を満たすので，

$$
\begin{aligned}
h(\alpha) &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{2\log\alpha - 1}{\alpha} \\
&= (2-\sqrt{5})e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < 0
\end{aligned}
$$



同様にして，

$$
h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{2\log\beta - 1}{\beta} = (2+\sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} > 0
$$

を得るので，$y=h(x)$ のグラフは上図のようになる．

ゆえに，求める k の値の範囲は $\boldsymbol{0 < k < (2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$ ．

別解

$f(x)=kx$ について，(1) で求めた $f(x)$ の凹凸を踏まえて

$$
\begin{cases}
y = f(x) \\
y = kx \quad \text{(原点を通る直線)}
\end{cases}
$$

の交点の個数をグラフを用いて求める．そのために $y=kx$ が $y=f(x)$ に接するときを考える．

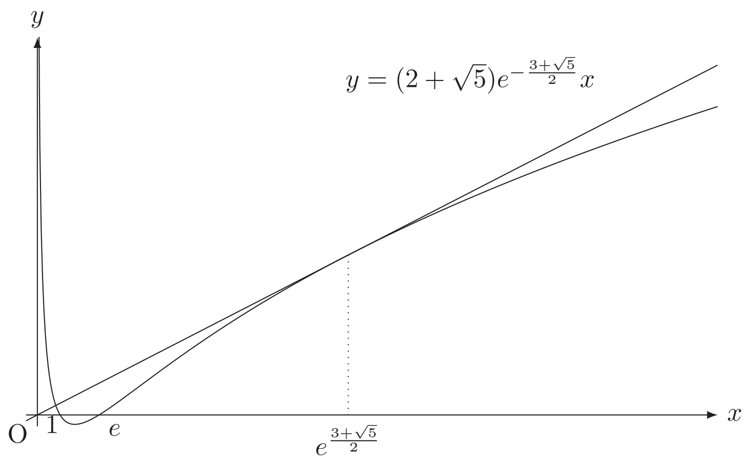
接点を $\left(t,\ (\log t)^2-\log t\right)$ とおくと，接線の方程式は

$$y=\frac{2\log t-1}{t}(x-t)+(\log t)^2-\log t$$

であるので，原点を通るとき

$$0=(\log t)^2-3\log t+1 \iff \log t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

下図のような接線であるとき，$t \geqq \sqrt{e}$ であるので $t=e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$．このとき接線の傾きは $(2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ である．



また，どんなに小さい正の数 k の値に対しても

$$\lim_{x\to\infty}\{kx-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}x\left\{k-\frac{(\log x)^2-\log x}{x}\right\}=\infty$$

が成立するため，どんなに小さい正の数 k の値に対しても $y=kx$ と $y=f(x)$ の交点は 3 個存在する．

以上より求める k の値の範囲は，$\boldsymbol{0<k<(2+\sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$ である．

(4)　$y=g(x) \iff x=f(y)$ であるから，$g(6)$ の値は $f(y)=6$ となる $y\ (y\geqq\sqrt{e})$ の値を求めればよい．

$$(\log y)^2-\log y=6 \iff (\log y-3)(\log y+2)=0$$

より，$\log y=3,\ -2$ すなわち $y=e^3,\ e^{-2}$ であるが，$y\geqq\sqrt{e}$ より $y=e^3$ である．よって，$g(6)=\boldsymbol{e^3}$ ．また，$x=f(y)$ を両辺 y について微分すると，

$$\frac{dx}{dy}=f'(y) \iff \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$

よって，$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$ であるから，

$$g'(6)=\frac{1}{f'(g(6))}=\frac{1}{f'(e^3)}=\boldsymbol{\frac{e^3}{5}}$$

別解

具体的に逆関数を求めてもよい．
$y=f(x)$ において，x と y を入れ替えて

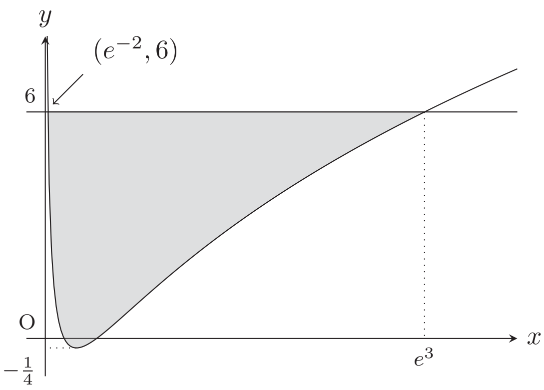
$$x=f(y) \iff x=(\log y)^2-\log y \iff \log y=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$$

$y \geqq \sqrt{e}$ であるから，$\log y = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$ ．

よって，$g(x) = e^{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}}$ であるから，$g(6) = e^{\frac{1+5}{2}} = \boldsymbol{e^3}$ ．

また，$g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}} e^{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}}$ より，$g'(6) = \boldsymbol{\dfrac{e^3}{5}}$ ．

(5)　求める立体は，下図灰色部分を y 軸のまわりに回転させたものなので，



$x < \sqrt{e}$ の部分を x_1，$\sqrt{e} \leqq x$ の部分を x_2 とする．求める立体の体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{1}{4}}^{6} {x_2}^2 dy - \pi \int_{-\frac{1}{4}}^{6} {x_1}^2 dy \\ &= \pi \int_{\sqrt{e}}^{e^3} x(2\log x - 1)dx - \pi \int_{\sqrt{e}}^{\frac{1}{e^2}} x(2\log x - 1)dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e^2}}^{e^3} x(2\log x - 1)dx \end{aligned}$$

ここで，

$$\int (2x\log x - x)dx = x^2(\log x - 1) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

より，

$$\begin{aligned} V &= \pi \Big[x^2(\log x - 1) \Big]_{\frac{1}{e^2}}^{e^3} \\ &= \pi \left\{ 2e^6 - \frac{1}{e^4}(-2-1) \right\} \\ &= \boldsymbol{(2e^6 + 3e^{-4})\pi} \end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（(1) 易 (2) 易 (3) 標準 (4) やや易 (5) やや易 (6) 標準）

(3)典型題ではあるが，x と $\sin x$ の対応関係を丁寧に考える必要がある．

(4)k と $k+2n-1$ の偶奇が異なることに気づくと多少早く絞れる．

(6)次数の議論を厳密にするのは実は少々難しいが，気づけなくても正解にはなる．

$\boxed{2}$［整数］（やや難）自然数に対して，正の約数の逆数の和を題材にした整数問題．(3) 以降では，厳密な議論はひとまずおいて答を探しに行く姿勢がほしいが，時間内に完答するのは困難だろう．

$\boxed{3}$［数学Ⅲの微分］（標準）対数を含む関数について，増減や変曲点，求積，逆関数の扱いなど幅広く問うている．難しくはないが計算力で差がつきそう．(4) の逆関数の扱いは経験したことがないと厳しいかも知れない．

1 日目と同様，小問集合は易しいが，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は計算が煩雑であったり方針が立ちにくいものも含まれ，高得点はとりにくい．目標は 75%．