医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2022年2月2日実施

1

(1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i\right)^8 = \boxed{\text{ア}}$. ただし，$i$ は虚数単位とする.

(2) 関数 $y=\sin(-x+\pi)+\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ は $x=\boxed{\text{イ}}$ のとき最小値をとる.

(3) 方程式 $\log_2(8x-8)-\log_2 x^2=1$ の解は $x=\boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) 3 辺の長さがすべて整数であり，ある 2 辺の長さの和が 4 となる三角形は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある.

(5) 曲線 $y=\dfrac{1}{x^2+9}$，x 軸，y 軸，直線 $x=3\sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(6) 初項が 5 で公差が -2 の等差数列を $\{a_n\}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_{4k} = \boxed{\text{カ}}$ である.

解答

ア．-256　イ．$\dfrac{7\pi}{6}$　ウ．2　エ．4　オ．$\dfrac{\pi}{9}$　カ．-39700

解説

(1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,i\right)^2 = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

よって，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i\right)^8 &= \left\{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i\right)^2\right\}^4\\ &= \left\{4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^4\\ &= 4^4\left\{\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\ &= 256(\cos\pi+i\sin\pi)\\ &= \mathbf{-256}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}y &= \sin(-x+\pi)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin x+\sqrt{3}\cos x\\ &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ であるから，与えられた関数は $x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3}{2}\pi \iff x=\boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi}$ のとき最小値をとる.

(3)　真数は正であるから $8x-8>0$ かつ $x^2>0$，つまり $x>1$ $\cdots$① が必要である．
$\log_2(8x-8)-\log_2 x^2=1 \iff \log_2(8x-8)=\log_2(2x^2)$ より

$$8x-8=2x^2 \iff (x-2)^2=0 \iff x=\mathbf{2}$$

これは ① をみたす．

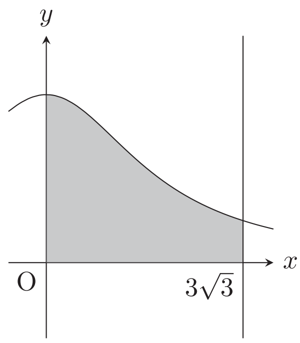
(4)　3 辺の長さを $a,\ b,\ c$ とおくと，対称性より $a+b=4$ の場合を考えればよい．このとき，$a,\ b$ は整数であることから，対称性を考慮して $(a,\ b)=(1,\ 3),\ (2,\ 2)$ のいずれかとなる．

- $(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき，三角形の成立条件より $c<3+1$ かつ $3<c+1$ が成り立つ必要があるので，$c=3$ が適する．
- $(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき，三角形の成立条件より $c<2+2$ かつ $2<c+2$ が成り立つ必要があるので，$c=1,\ 2,\ 3$ が適する．

以上より，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 1), (2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 2,\ 3)$ の $\mathbf{4}$ 個ある．

(5)　$y=\dfrac{1}{x^2+9}$ は $x>0$ の範囲で正の値をとるので，求める面積 S とおくと，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{9(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta \\ &\qquad (\text{ただし，} x=3\tan\theta \text{と置いた}) \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{9}} \end{aligned}$$



(6)　a_n の一般項は $a_n=5+(-2)\cdot(n-1)=-2n+7$ である．よって，$a_{4k}=-8k+7$ であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100}(-8k+7) &= (-8)\cdot\sum_{k=1}^{100}k+7\cdot\sum_{k=1}^{100}1 \\ &= -8\cdot\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101+7\cdot 100 \\ &= \mathbf{-39700} \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ $(a>0,\ ac-b\fallingdotseq 0)$ を考える．

(1) $f'(x)=$ $\boxed{\text{ア}}$

(2) 関数 $f(x)$ とその逆関数が等しくなるための条件は $\boxed{\text{イ}}$ である．

C を $y=f(x)$ のグラフとし，C' を $y=f'(x)$ のグラフとする．以下は，$b,\ c$ を用いずに答えること．

(3) $\boxed{\text{イ}}$ のとき，C と C' が共有点を持ち，その共有点での接線が一致するための条件は $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) $\boxed{\text{イ}}$ かつ $b=$ $\boxed{\text{ウ}}$ のときを考える．

(i) C と C' の共有点における接線を ℓ とする．ℓ と x 軸との交点 A の座標は $\left(\boxed{\text{エ}},\ 0\right)$，$y$ 軸との交点 B の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ である．原点を O とすると，三角形 OAB の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(ii) $\boxed{\text{エ}}<0,$ $\boxed{\text{オ}}<0$ の範囲で，三角形 OAB の面積の最大値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{ac-b}{(x+c)^2}$　イ．$c=-a$　ウ．$-a^2+4a$　エ．$a-3$　オ．a^2-3a　カ．$\dfrac{a}{2}(a-3)^2$　キ．2

解説

(1) $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ より，$f'(x)=\dfrac{a(x+c)-(ax+b)}{(x+c)^2}=\boldsymbol{\dfrac{ac-b}{(x+c)^2}}$.

(2) $y=f(x)$ とおくと，$y=a+\dfrac{b-ac}{x+c}$ であり，$b-ac\fallingdotseq 0$ であるから，$y\fallingdotseq a$ がわかる．このとき，

$$y=\frac{ax+b}{x+c}\iff (y-a)x=-cy+b\iff x=\frac{-cy+b}{y-a}$$

となる．x と y を入れ替えて，$y=\dfrac{-cx+b}{x-a}$．よって，$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\dfrac{-cx+b}{x-a}$.

$f(x)=f^{-1}(x)$ から

$$\frac{ax+b}{x+c}=\frac{-cx+b}{x-a}\iff (a+c)x^2+(c^2-a^2)x-b(a+c)=0$$

となる．これが任意の x に対して成り立つので，

$$\begin{cases} a+c=0 \\ c^2-a^2=0 \\ b(a+c)=0 \end{cases}$$

が成り立たなければならない．これより $\boldsymbol{c=-a}$ を得る．

別解

$f^{-1}(x)=f(x)$ のとき $f\circ f(x)=x$ であるから，

$$f\circ f(x)=f(f(x))=\frac{a\cdot\dfrac{ax+b}{x+c}+b}{\dfrac{ax+b}{x+c}+c}=\frac{(a^2+b)x+b(x+c)}{(a+c)x+b+c^2}$$

より

$$f\circ f(x)=x\iff\frac{(a^2+b)x+b(x+c)}{(a+c)x+b+c^2}=x\iff (a+c)x^2+(c^2-a^2)x-b(a+c)=0$$

が任意の x に対して成り立たなければならない．以下同様．

(3)　$c=-a$ のとき，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-a}$．

また，$f'(x)=-\dfrac{a^2+b}{(x-a)^2}$．これを $g(x)$ とおくと，$g'(x)=\dfrac{2(a^2+b)}{(x-a)^3}$．

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接するとき，$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$ を満たす．

$f(t)=g(t)$ より，$\dfrac{at+b}{t-a}=-\dfrac{a^2+b}{(t-a)^2}$

$f'(t)=g'(t)$ より，$-\dfrac{a^2+b}{(t-a)^2}=\dfrac{2(a^2+b)}{(t-a)^3}$

この 2 式から，$t=a-2$, $\boldsymbol{b=-a^2+4a}$ を得る．

(4)　(i)　$c=-a$, $b=-a^2+4a$ のとき，$f(x)=\dfrac{ax-a^2+4a}{x-a}$，$f'(x)=-\dfrac{4a}{(x-a)^2}$ となり，

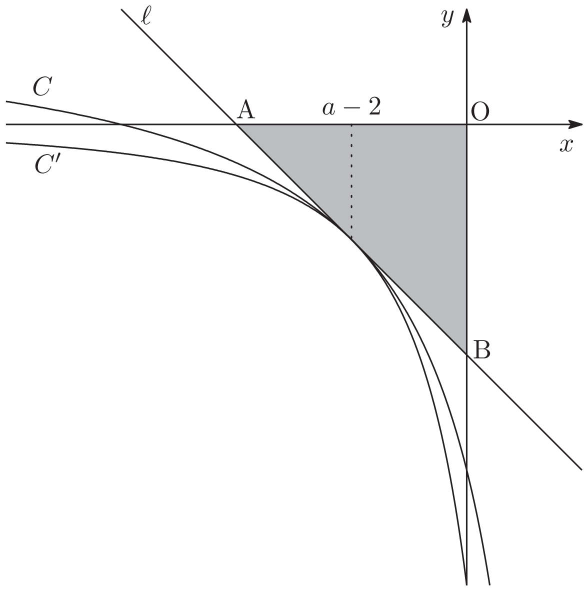
$f(a-2)=-a$, $f'(a-2)=-a$ を得る．

これより接線 ℓ の方程式は，$y=-a(x-a+2)-a=-ax+a^2-3a$．

ℓ と x 軸との交点 A の座標は $(\boldsymbol{a-3},\ 0)$，y 軸との交点 B の座標は $(0,\ \boldsymbol{a^2-3a})$．

△OAB の面積を $S(a)$ とおくと，$a>0$ に注意して

$$S(a)=\frac{1}{2}|a-3||a^2-3a|=\frac{1}{2}|a(a-3)^2|=\boldsymbol{\frac{1}{2}a(a-3)^2}$$



(ii)　$a-3<0$, $a^2-3a<0$ より，$0<a<3$．

また，$S'(a)=\dfrac{3}{2}(a-1)(a-3)$ であり，増減表は以下のとおり．

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$	(0)	$\nearrow$	2	$\searrow$	(0)

よって，$S(a)$ の最大値は $S(1)=\boldsymbol{2}$．

$\boxed{3}$ a を正の数とし，点 A $(0,\ 1)$，B $(0,\ -1)$，C $(a,\ 0)$ とする．3 直線 AB, BC, CA のすべてに接する円の集合を S とする．S に属する円のうち半径が最も小さいものを O_1，中心が第 1 象限にある円を O_2 とおく．O_1 と内接し，S に属する O_1 以外のすべての円と外接する円を O_3 とする．

(1) O_1 の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) O_2 の中心の座標は $\left(\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である．

(3) O_3 の半径は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) a が正の数を動くとき，O_3 の半径は $a=\boxed{\text{オ}}$ で最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる．

(5) O_2 と O_3 の接点の y 座標は $\boxed{\text{キ}}$ である．a が正の数を動くとき，$\boxed{\text{キ}}$ は $a=\boxed{\text{ク}}$ で最小値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとる．

(6) 直線 BC と O_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}$　イ．a　ウ．$\sqrt{a^2+1}$　エ．$\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$　オ．1　カ．$\dfrac{1}{2}$

キ．$\dfrac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{5a^2+1}$　ク．$\dfrac{\sqrt{35}}{5}$　ケ．$\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$　コ．$\dfrac{1}{2}a$　サ．$\dfrac{2a}{a^2+1}$

解説

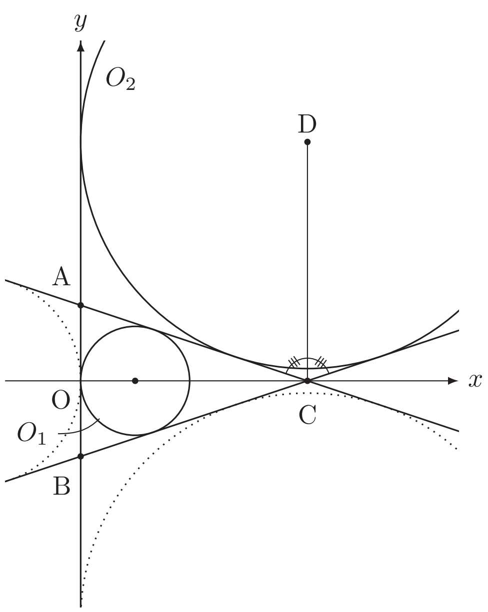
(1) $\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{a^2+1}$ である．

O_1 は $\triangle$ABC の内接円であるので求める半径を r_1 とすると，

$$\frac{1}{2}r_1(2+\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1})=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2 \iff r_1=\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}$$

よって半径は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}}$ である．

(2)



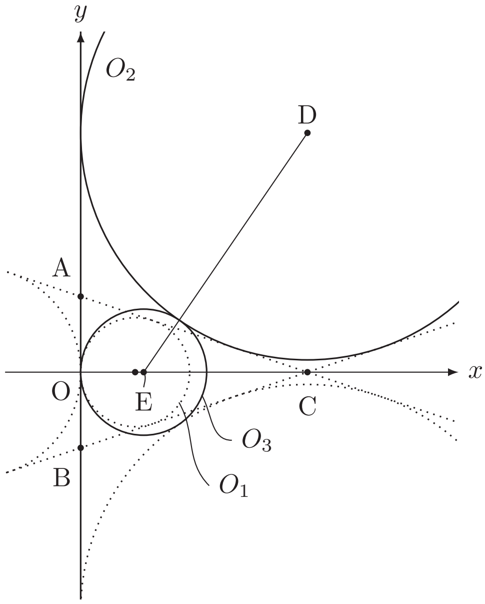
O_2 の中心を D とすると，円 O_2 は $\triangle$ABC の角 B 内の傍接円であるため，D は $\angle$ACB の外角の二等分線 $(x=a)$ 上にある．よって，D $(a,\ b)$ (第 1 象限より $b>0$) とおくことができる．D と直線 AB $(x=0)$，直線

BC $(x - ay - a = 0)$ との距離が等しければよいので,

$$a = \frac{ab}{\sqrt{a^2+1}} \iff b = \sqrt{a^2+1}$$

よって, D $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\sqrt{a^2+1}})$.

(3)



O_3 は S の領域 $x \leqq 0$ の部分にある円と原点 O で接し, O_2 と直線 AB の $x > 0$ 側で接する（残りの円は x 軸に関して O_2 と対称であるため考慮しなくてよい）ので, O_3 の中心を E $(p,\ 0)$ $(p > 0)$ とすると半径は p である. O_2 と外接することから

$$p + a = \sqrt{(a-p)^2 + a^2 + 1} \iff p = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

よって, O_3 の半径は $\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)}$ である.

(4) $a > 0$ であるので相加平均・相乗平均の関係を用いて,

$$\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geqq \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1}{2}$$

等号は $a = \frac{1}{a}$ より $a = 1$ のとき成立するので, よって, $a = \boldsymbol{1}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ をとる.

(5) O_2 と O_3 の接点は 中心を結ぶ線分 DE を $a : \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ に内分する点であるので, 求める y 座標を $f(a)$ とすると,

$$f(a) = \frac{\frac{1}{4}(a + \frac{1}{a})}{a + \frac{1}{4}(a + \frac{1}{a})} \cdot \sqrt{a^2+1} = \boldsymbol{\frac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{5a^2+1}}$$

これより，

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{a^2+1}\cdot 2a(5a^2+1)-(a^2+1)\sqrt{a^2+1}\cdot 10a}{(5a^2+1)^2} \\
&= \frac{a\sqrt{a^2+1}\{3(5a^2+1)-10(a^2+1)\}}{(5a^2+1)^2} \\
&= \frac{a\sqrt{a^2+1}(5a^2-7)}{(5a^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

を得る．これより増減表は以下のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{35}}{5}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$	(1)	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$	$\nearrow$

よって，$a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{35}}{5}}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{15}}{25}}$ をとる．

別解

$f(a)$ のところで $a^2=t$ とすると少しだけ計算は軽くなる．

$f(a)=\dfrac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{5a^2+1}=\dfrac{(t+1)\sqrt{t+1}}{5t+1}=g(t)$ とおくと，

$g'(t)=\dfrac{(5t-7)\sqrt{t+1}}{2(5t+1)^2}$ となり同様の結果をえる．

(6) 直線 BC $y=\dfrac{1}{a}x-1$ と円 $O_3:\left\{x-\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right\}^2+y^2=\dfrac{1}{16}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$ との交点は

$$
\begin{aligned}
&\left\{x-\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}^2+\left(\frac{1}{a}x-1\right)^2=\frac{1}{16}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 \\
\iff& 2(a^2+1)x^2-(a^3+5a)x+2a^2=0 \\
\iff& (2x-a)\{(a^2+1)x-2a\}=0 \\
\iff& x=\boldsymbol{\frac{a}{2}},\ \boldsymbol{\frac{2a}{a^2+1}}
\end{aligned}
$$

注：この円は三角形 ABC の 9 点円（フォイエルバッハの円）と呼ばれるものである．9 点円の通常の定義から，それが内接円，傍接円に接することを示すこともできる．

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（(1) 標準 (2) 易 (3) 易 (4) やや易 (5) やや易 (6) やや易）

(1)ぱっと見で偏角がわからないので戸惑うが，倍角公式を使うか 2 乗してみれば偏角はわかる．あとは易しい．

(4)しっかり数え上げれば正解できる．

(6)添字が $4k$ になっているが，内容は基本的であり，確実に正解したい．

$\boxed{2}$［微分法］（標準）文字が多くて計算が煩雑だが，ていねいに処理したい．「逆関数の求め方」や，「2 曲線が接する条件」をきちんと理解できていれば，あとはしっかり手を動かすだけである．

$\boxed{3}$［平面図形，数学Ⅲの微分］（やや難）三角形の内心，傍心，および接する円の位置関係についての問題．傍心については内心と同様に，角の二等分線の性質や，2 接線の交点と接点の距離が等しいことを利用すればよいが，やや不慣れな受験生が多かったかも知れない．後半は微分や方程式の問題．計算が重い．

小問集合は易しいが，$\boxed{2}$, $\boxed{3}$ は計算が煩雑なところがあり，高得点はとりにくい．目標は 70%.