解答速報

久留米大学 医学部(推薦)　数学

2021年 11月20日実施

1.

(1)　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x = 1$ を満たす x をすべて記すと，$x =$ $\boxed{①}$ である。

(2)　$0 \leqq x < 2\pi,\ 0 \leqq y < 2\pi$ のとき，連立方程式 $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x + \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ を満たす $(x,\ y)$ の組をすべて記すと，$(x,\ y) =$ $\boxed{②}$ である。

解答

① $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6}$　② $\left(0,\ \dfrac{11}{6}\pi\right),\ \left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

解説

(1)　与式を変形すると $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cos x = 1 - \sin x$ となる．$\sin x = s$ とおくと $\cos x = \pm\sqrt{1-s^2}$ なので，先程の式を 2 乗して代入すると

$$\frac{4}{3}s^2(1-s^2) = (1-s)^2$$
$$\iff (1-s)\left\{\frac{4}{3}s^2(1+s) - (1-s)\right\} = 0$$
$$\iff (s-1)(2s-1)(2s^2+3s+3) = 0$$

$2s^2+3s+3=0$ は実数解を持たない．$s=1$ の場合，元の式に $\sin x = 1$ を代入すると $\cos x = 0$ となるので $x = \dfrac{\pi}{2}$ である．$s = \dfrac{1}{2}$ の場合，元の式に $\sin x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるので $x = \dfrac{\pi}{6}$ である．答は $x = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$.

(2)　$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \cos y,\ \cos x = \dfrac{1}{2} - \sin y$ を $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos y\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sin y\right)^2 = 1$$
$$\iff \frac{3}{4} - \sqrt{3}\cos y + \cos^2 y + \frac{1}{4} - \sin y + \sin^2 y = 1$$
$$\iff \sin y = 1 - \sqrt{3}\cos y$$

これを $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入すると

$$\left(1 - \sqrt{3}\cos y\right)^2 + \cos^2 y = 1$$

$$\iff 4\cos^2 y - 2\sqrt{3}\cos y = 0$$

$$\iff \cos y = 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る．（ここは合成を使って解いてもよい．）　順次代入して戻していくと

$$(\cos x,\ \sin x,\ \cos y,\ \sin y) = \left(1,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ 1\right)$$

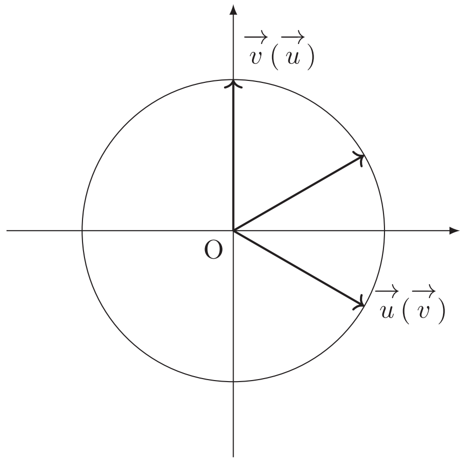
がわかる．これより答は $(x,\ y) = \boldsymbol{\left(0,\ \frac{11}{6}\pi\right),\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)}$.

$\boxed{\text{別解}}$

$x = \dfrac{\pi}{2} - z$ と置き換えると，与式は

$$\begin{pmatrix}\cos z\\ \sin z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

と表すことが出来る．これは $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}\cos z\\ \sin z\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix}$ が次の図のようになっていることを表す．



したがって明らかに $(z,\ y) = \left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{6}\right)$ または $\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$ である．（ただし 2π の整数倍のずれは後から調整するものとする．）これより解答の通りの答を得る．

2.

(1)　1 〜 6 の番号が 1 つずつ書かれた 6 個の球を，A，B，C と書かれた箱に入れるとき，箱に入る球の個数が 1 個，2 個，3 個となるような入れ方は $\boxed{③}$ 通りである。ただし，箱に入る球の個数が決まっているだけで，どの箱に何個の球を入れるかが決まっているわけではない。

(2)　1 〜 6 の番号が 1 つずつ書かれた 6 個の球を，A，B，C と書かれた箱に入れるとき，箱に入る球の個数が 1 個，1 個，4 個となるような入れ方は $\boxed{④}$ 通りである。ただし，箱に入る球の個数が決まっているだけで，どの箱に何個の球を入れるかが決まっているわけではない。

(3)　区別のできない 6 個の球を，何も書かれていない区別のできない 3 つの箱に空箱ができないように入れるとき，その入れ方は $\boxed{⑤}$ 通りである。

(4)　1 〜 6 の番号が 1 つずつ書かれた 6 個の球を，何も書かれていない区別のできない 3 つの箱に入れるとき，箱に入る球の個数が 2 個ずつとなるような入れ方は $\boxed{⑥}$ 通りである。

(5)　区別のできない 6 個の球を，A，B，C と書かれた箱に空箱ができないように入れるとき，その入れ方は $\boxed{⑦}$ 通りである。

(6)　1 〜 6 の番号が 1 つずつ書かれた 6 個の球を，A，B，C と書かれた箱に空箱ができないように入れるとき，その入れ方は $\boxed{⑧}$ 通りである。

解答

③ 360　④ 90　⑤ 3　⑥ 15　⑦ 10　⑧ 540

解説

(1)　A に 1 個，B に 2 個，C に 3 個入るとすると，

$$ {}_6C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 60 \text{ 通り} $$

どの箱に何個の球を入れるかは，$3! = 6$ 通り考えられるので，求める場合の数は

$$ 60 \times 3! = \mathbf{360} \text{ 通り} $$

(2)　A に 1 個，B に 1 個，C に 4 個入るとすると，

$$ {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_4 = 30 \text{ 通り} $$

どの箱に何個の球を入れるかは，$\dfrac{3!}{2} = 3$ 通り考えられるので，求める場合の数は

$$ 30 \times 3 = \mathbf{90} \text{ 通り} $$

(3)　6 個の玉を個数のみ考慮して分配すると，

$$ (1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2) $$

となる．よって **3** 通り．

(4)　箱に A, B, C の区別があるとき，それぞれの箱に 2 個ずつ球を入れる入れ方は

$$ {}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 = 90 \text{ 通り} $$

実際には箱に区別がないので，$3! = 6$ 通りずつ重複して数えていることになるので，求める場合の数は

$$ \frac{90}{6} = \mathbf{15} \text{ 通り} $$

(5)　6 個の ◯ の間に | を 2 本入れる場合の数に等しいので，

$$ {}_5\mathrm{C}_2 = \mathbf{10} \text{ 通り} $$

(6)　空箱ができてよいと考えると，球の入れ方は全部で $3^6 = 729$ 通り．

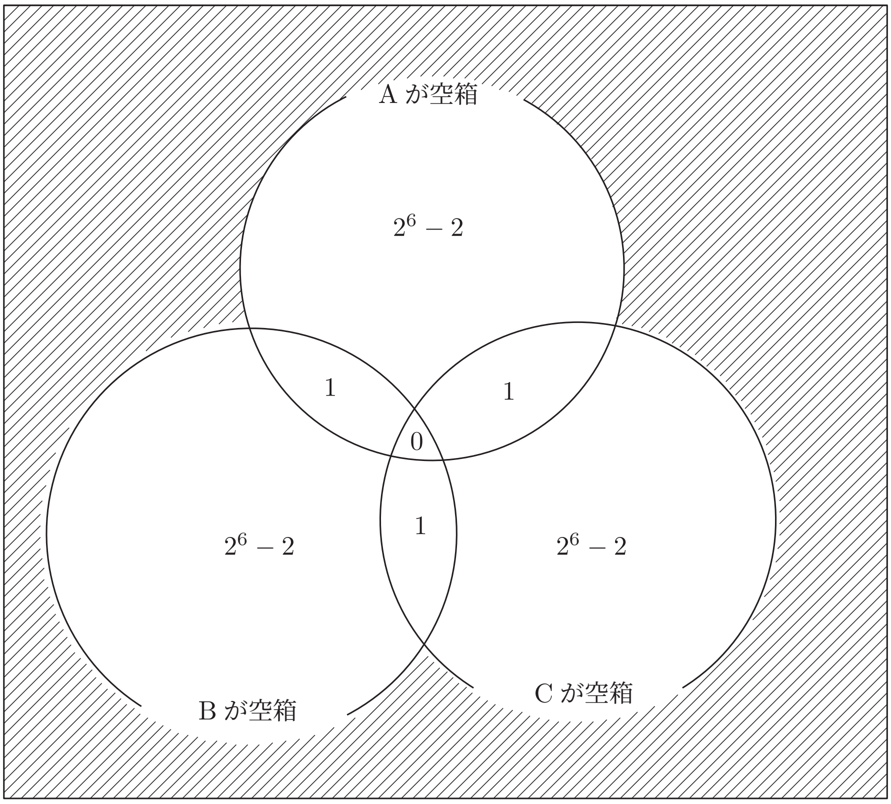
空箱が 1 個できるときの球の入れ方は，

$$ {}_3\mathrm{C}_1 \times (2^6 - 2) = 186 \text{ 通り} $$

空箱が 2 個できる球の入れ方は，3 通り．

よって求める場合の数は，図の斜線部を求めればよいので，

$$ 729 - (186 + 3) = \mathbf{540} \text{ 通り} $$



注釈

以上を整理すると以下のように表される．

球区別　なし	なし	あり	あり
箱区別　なし	あり	なし	あり
(1，1，4)	3	15	90 ④
(1，2，3)	6	60	360 ③
(2，2，2)	1	15 ⑥	90
計 3 通り⑤	10 ⑦	90	540 ⑧

⑦ の 10 および ⑧ の 540 が各行の合計としても計算できることから，結果の検算が出来る．

3. 放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2$ と円 $C: x^2+(y-a)^2=8$ が 2 点で接している。ただし，a は実数の定数とする。

(1) $a=\boxed{⑨}$ であり，2 つの接点のうち x 座標が正である座標は $\boxed{⑩}$ である。さらに，放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2$ と円 C とで囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{⑪}}{3}$ である。

(2) 放物線 $y=mx^2+n\ (m<0)$ と円 C も 2 点で接し，その接点を P, Q とする。円 C の中心を T とするとき，$\angle\mathrm{PTQ}=90^\circ$ となるのは，$m=\boxed{⑫}$，$n=\dfrac{\boxed{⑬}}{2}$ のときである。

解答

⑨ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　⑩ $\left(\sqrt{6},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$　⑪ $18\sqrt{3}-8\pi$　⑫ $-\dfrac{1}{4}$　⑬ $5\sqrt{2}+6$

解説

$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2\cdots$ⓐ とする．

(1) ⓐ と C が $x=t$ で接するとする．「2 点で接する」という条件から $t \fallingdotseq 0$ としてよい．$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2$ から $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ なので，点 $\mathrm{A}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2\right)$ での ⓐ の法線の方程式は $y=-\dfrac{2}{\sqrt{2}t}(x-t)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2$ である．この法線の y 切片の座標は $\left(0,\ \sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2\right)$ であり，この y 切片と点 A との距離が C の半径 $2\sqrt{2}$ と一致すればよい．よって

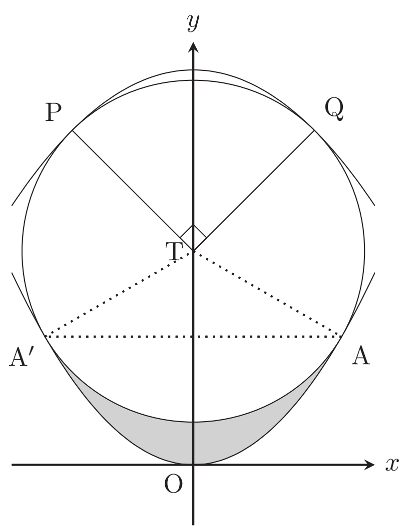
$$(t-0)^2+\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}t^2-\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}t^2\right)\right\}^2=(2\sqrt{2})^2 \iff t=\pm\sqrt{6}$$

となる．これより $a=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}t^2=\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{2}}{2}}$ であり，接点のうち x 座標が正であるものの座標は $\boldsymbol{\left(\sqrt{6},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$ である．この接点を A とし，もう一方の接点を A$'$ とする．また，円 C の中心を T とする．

ⓐ と C とで囲まれた部分は，C の外側と解釈とすると右下図の灰色部分である．$\angle\mathrm{ATA'}=120^\circ$ であることに注意すると，求める面積は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\sqrt{6}-(-\sqrt{6})\right\}^3-\left\{(2\sqrt{2})^2\pi\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\right\}=\boldsymbol{\frac{18\sqrt{3}-8\pi}{3}}$$

(2) $y=mx^2+n\cdots$ⓑ とする．ⓑ, C が y 軸に関して対称であることと $\angle\mathrm{PTQ}=90^\circ$ から，TP, TQ と y 軸の正の向きのなす角は 45° である．よって P, Q の座標は $\left(\pm2,\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}+2\right)$ であることがわかる．また，P, Q での ⓑ と C の共通接線の傾きは ±1 である．ⓑ を x で微分すると $y'=2mx$ なので，$x=2$ のときにこれが -1 に等しいことから $m=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$ がわかる．よって ⓑ の方程式は $y=-\dfrac{1}{4}x^2+n$ とおけ，これに P または Q の座標を代入することにより，$n=\dfrac{\boldsymbol{5\sqrt{2}+6}}{2}$ もわかる．



4.　座標空間内に

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(2,\ -2,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 2,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

を定め，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{1}{2}\leqq s+t\leqq 1,\ 0\leqq u\leqq 2$$

を満たし，点 Q は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})+19\leqq 0$$

を満たす。

(1)　点 R が $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{1}{2}\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 R が存在する範囲は $\boxed{⑭}$ となり，その面積は $\boxed{⑮}$ である。ただし，$\boxed{⑭}$ は「円，三角形，四角形，五角形」のいずれかで答えよ。

(2)　点 P が存在する範囲は立体であり，その立体の体積は $\boxed{⑯}$ である。

(3)　点 Q が存在する範囲は，中心の座標が $\boxed{⑰}$ であり，半径が $\boxed{⑱}$ である球の球面および内部であるから，点 P が存在する範囲と点 Q が存在する範囲の共通部分の体積は $\boxed{⑲}$ である。

解答

⑭ 四角形　⑮ 3　⑯ 6　⑰ (4, 0, 2)　⑱ 1　⑲ $\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1)　$\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 2,\ 0)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(s+t)(2,\ -2,\ 0)+(t+1)(2,\ 2,\ 0)$$

すなわち

$$(x,\ y,\ z)=(2s+4t+2,\ -2s+2,\ 0)$$

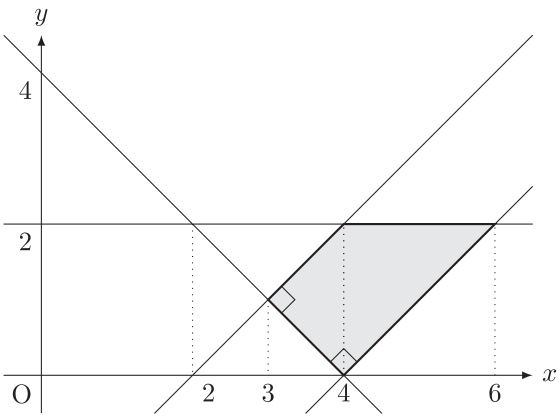
であるから，

$$\begin{cases} x=2s+4t+2 \\ y=-2s+2 \\ z=0 \end{cases} \quad\text{より}\quad \begin{cases} s=-\dfrac{1}{2}y+1 \\ t=\dfrac{x+y}{4}-1 \end{cases}$$

を得る．

$$\begin{cases} s\geqq 0 \\ t\geqq 0 \\ \dfrac{1}{2}\leqq s+t\leqq 1 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\leqq 2 \\ x+y\geqq 4 \\ 2\leqq x-y\leqq 4 \\ z=0 \end{cases}$$

であるから，点 R が存在する範囲は下図のようになるため，**四角形**である．



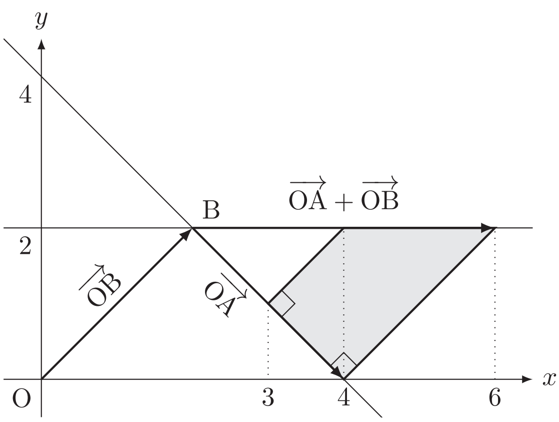
また，この四角形は台形であるから，求める面積は，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=\mathbf{3}$$

別解

点 R が存在する範囲は，次のようにして求めることもできる．

与えられた方程式を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ と変形すると，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$\dfrac{1}{2} \leqq s+t \leqq 1$ より，点 R が存在する範囲は，下図のようになる．



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+u(0,0,1)$　$(0 \leqq u \leqq 2)$ であるから，点 P が存在する範囲は，(1) で求めた台形を底面とする高さが 2 の四角柱の表面および内部である．よって，求める立体の体積は，$3\cdot 2=\mathbf{6}$.

(3)　Q$(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2x-2y,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2x+2y,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=z$$

であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})+19 \leqq 0$ より，

$$x^2+y^2+z^2-2(2x-2y+2x+2y+2z)+19 \leqq 0$$
$$x^2-8x+y^2+z^2-4z+19 \leqq 0$$
$$(x-4)^2+y^2+(z-2)^2 \leqq 1$$

したがって，点 Q が存在する範囲は，中心の座標が $\mathbf{(4,\ 0,\ 2)}$ であり，半径が $\mathbf{1}$ である球の球面および内部である．

なお，点 Q の存在範囲を調べるには以下のような変形を行ってもよい．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})+19 \leqq 0$$
$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+19 \leqq 0$$

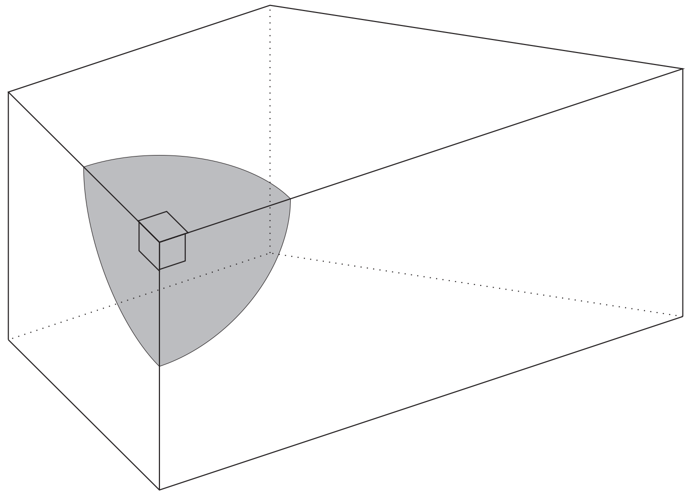
（ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(4,\ 0,\ 2)$ である）

$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2-19=20-19=1$$

$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| \leqq 1$$

したがって同じ結果が得られる．

点 P が存在する範囲と点 Q が存在する範囲の共通部分は，下図の灰色部分である．球の中心 M において立体の 3 辺が直交するので，求める体積は球の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるから，$\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{8}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$.



5. 花子先生と太郎さんの二人の会話を読み，次の問いに答えよ。

〔問題 1〕 0 以上の整数 m, n において，$3m+7n$ で表すことのできない自然数をすべて求めよ。

先生 ：まず，ひとつずつ調べてみましょう。1 桁の自然数で，$3m+7n$ で表すことのできない自然数は何個ありますか？

太郎 ：1 桁の自然数では $\boxed{⑳}$ 個ですね。

先生 ：そうですね。では，20 以下の自然数で，$3m+7n$ で表すことのできない最大の自然数は？

太郎 ：それは $\boxed{㉑}$ です。ひとつずつ調べてわかりましたが，恐らく，$\boxed{㉑}$ より大きい自然数で，$3m+7n$ で表すことのできない自然数はないと思います。

先生 ：では，「$\boxed{㉑}$ より大きい自然数で，$3m+7n$ で表すことのできない自然数はない」$\cdots(*)$ を証明しましょう。$n=0$ のとき，$3m+7n$ は 3 の倍数になります。では，$n=1$ のときと $n=2$ のときは，$3m+7n$ はどんな自然数になりますか？

太郎 ：$n=1$ のときは $\boxed{㉒}$ で，$n=2$ のときは $\boxed{㉓}$ です。

先生 ：そうですね。これで $(*)$ は証明できそうですね。

太郎 ：はい。

(1) $\boxed{⑳}$, $\boxed{㉑}$ に当てはまる自然数を答えよ。

(2) $\boxed{㉒}$, $\boxed{㉓}$ に当てはまる最も適当なものを，次の ⓪ ～⑦ のうちから一つずつ選べ。

⓪ 3 で割って 1 余る 4 以上の自然数　① 3 で割って 1 余る 7 以上の自然数
② 3 で割って 1 余る 10 以上の自然数　③ 3 で割って 1 余る 13 以上の自然数
④ 3 で割って 2 余る 5 以上の自然数　⑤ 3 で割って 2 余る 8 以上の自然数
⑥ 3 で割って 2 余る 11 以上の自然数　⑦ 3 で割って 2 余る 14 以上の自然数

〔問題 2〕 0 以上の整数 m, n において，$5m+11n$ で表すことのできない自然数をすべて求めよ。

先生 ：〔問題 1〕と同じように考えるとどうなりますか？

太郎 ：$5m+11n$ で表すことのできない自然数は $\boxed{㉔}$ 個あり，その中で最大の自然数は $\boxed{㉕}$ です。

先生 ：そのとおり。よくできましたね。

(3) $\boxed{㉔}$, $\boxed{㉕}$ に当てはまる自然数を答えよ。

〔問題 3〕 0 以上の整数 l, m, n において，$4l+15m+37n$ で表すことのできない自然数をすべて求めよ。

先生 ：3 個の項の和になりましたが，どうですか？　2 個の項の和と同じように考えればいいのです。

太郎 ：1 個の項が増えただけで，すごく難しく感じます。でも，同じようにすればいいってことは，l, m, n のどれか 2 つの文字に具体的な値を入れていけばできるのかな。

先生 ：そうですね。一度その考え方でやってみるといいですよ！

太郎 ：そうすると $\cdots$ ，$4l+15m+37n$ で表すことのできない自然数は $\boxed{㉖}$ 個あり，その中で最大の自然数は $\boxed{㉗}$ ですか？

先生 ：そのとおりです。よくできました。

(4) $\boxed{㉖}$, $\boxed{㉗}$ に当てはまる自然数を答えよ。

解答

⑳ 5　㉑ 11　㉒ ①　㉓ ⑦　㉔ 20　㉕ 39　㉖ 19　㉗ 33

解説

(1)　0 以上の整数 m, n を用いて，$3m+7n$ で表すことのできない 1 桁の自然数は 1, 2, 4, 5, 8 の **5** 個である．また， $n=0$, 1, 2 のそれぞれの場合において， $3m+7n$ がとり得る値は次のようになる．

n	$3m+7n$									
0	(0)	3	6	9	12	15	18	21	24	$\cdots$
1			7	10	13	16	19	22	25	$\cdots$
2					14	17	20	23	26	$\cdots$

したがって，**11** より大きい自然数で， $3m+7n$ で表すことのできない自然数はないと推測できる．

(2)　$n=1$ のとき $3m+7n=3m+7$ であるから，これは **3 で割って 1 余る 7 以上の自然数** である．$n=2$ のとき $3m+7n=3m+14$ であるから，これは **3 で割って 2 余る 14 以上の自然数** である．

(3)　$n=0$, 1, 2, 3, 4 のそれぞれの場合において， $5m+11n$ のとり得る値は次のようになる．

n	$5m+11n$												
0	(0)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	$\cdots$
1			11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	$\cdots$
2					22	27	32	37	42	47	52	57	$\cdots$
3							33	38	43	48	53	58	$\cdots$
4									44	49	54	59	$\cdots$

したがって， $5m+11n$ で表すことのできない自然数は **20** 個あり，その中で最大の自然数は **39** である．

(4)　まず，$n=0$ として $m=0$, 1, 2, 3 のそれぞれの場合において，$4l+15m$ のとり得る値を調べると次のようになる．

m	$4l+15m$																
0	(0)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	$\cdots$
1				15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	$\cdots$
2								30	34	38	42	46	50	54	58	62	$\cdots$
3												45	49	53	57	61	$\cdots$

したがって，42 以上の自然数は $4l+15m$ で表せる．ここで，上記の表に現れる自然数全体の集合を S_1 としておく．次に $n=1$ とすると，$4l+15m+37n=4l+15m+37$ であるから，この形で表される自然数の全体の集合（これを S_2 とする）は S_1 のそれぞれの要素および 0 に 37 を加えたものとなる．このとき， S_1 には含まれない 37, 41 が S_2 の要素として現れるので（それ以外の S_2 の要素はすべて S_1 の要素である)，$S_1\cup S_2=S_1\cup\{37,\ 41\}$ である．この集合を S_3 とする．

m	$4l+15m+37n$																
0	(0)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	$\cdots$
1				15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	$\cdots$
2								30	34	38	42	46	50	54	58	62	$\cdots$
3										37	41	45	49	53	57	61	$\cdots$

$n\geqq 2$ のときは $4l+15m+37n\geqq 74$ となるので，この形で表される自然数全体の集合は S_3 の部分集合である．以上により，$4l+15m+37n$ で表すことのできない自然数は **19** 個であり，その中で最大の自然数は **33** である．

別解

まず $15m+37n$ の形で表すことができる 0 以上の整数を小さい方から考えると, 0, 15, 30, 37, $\cdots$ である．このうち初めの 4 つの整数は 4 で割った余りがすべて異なる（ mod 4 とすると $0\equiv 0$, $15\equiv 3$, $30\equiv 2$, $37\equiv 1$)．したがって，以下の形で表される自然数が $4l+15m+37n$ の形で表すことができる自然数のすべてとなる．

$0+4l\to(0,)\ 4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 36,\ \cdots$　　　　(4 の倍数)

$15+4l\to 15,\ 19,\ 23,\ \cdots,\ 35,\ \cdots$　　　　(4 で割ると 3 余る)

$30+4l \to 30,\ 34,\ 38,\ \cdots$ （4 で割ると 2 余る）

$37+4l \to 37,\ 41,\ 45,\ \cdots$ （4 で割ると 1 余る）

このことから 34 以上の自然数はすべて表すことができる．よって $4l+15m+37n$ の形で表すことができない最大の整数は 33 となる．表すことのできない自然数を列挙すると

（4 の倍数はすべて表せる）
4 で割ると 3 余るものは 3, 7, 11
4 で割ると 2 余るものは 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26
4 で割ると 1 余るものは 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33

の合計 19 個となる．

講評

1.［三角関数］（やや難）(1) を加法定理や合成，和積の公式を利用しようとして行き詰った人も多いのではないだろうか．力技で 4 次方程式に持ち込むのが結果的に楽だろう．(2) も計算で解けばよいが，ベクトルを利用する見通しのよい解法も存在する．

2.［場合の数］（標準）球を箱に入れる場合の数の問題．球と箱に区別がある・なしという状況に応じて解法を選択していく必要があるが，解いた経験があるかないかで点差がついただろう．

3.［図形と方程式，数学IIの微積分］（標準）放物線と円が接する条件は典型的問題であり落としたくない．後半は図形的な考察から接点での共通接線の傾きがわかることに気付けるとよい．いずれも処理力で得点に差がつきそうである．

4.［空間ベクトル］（やや難）ベクトルで表された点 P と点 Q の存在範囲を調べる問題である．座標が与えられているため，P，Q の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおいて考えるとよい．(1) で点 R の存在範囲が把握できなければ大幅に失点してしまうため，慎重に計算したい．なお，(1) が出来なくても (3) の球の中心と半径は求められるため，あきらめずに問題文をきちんと読み，解けるところがないかを探すことが重要である．

5.［整数の性質］（やや難）いわゆる「フロベニウスの硬貨交換問題」である．一般に p, q を互いに素な自然数とするとき，0 以上の整数 $x,\ y$ を用いて $px+qy$ の形に表せない最大の数が $pq-p-q$，表せない数の個数が $\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}$ であることが知られている．有名問題ではあるが，制限時間内に正解するのは難しいだろう．

昨年度に引き続き空所補充形式だったが，昨年度より問題が難化し，分量も増えている．大問 2，3 でなるべく得点をかせいだ上で，それ以外でどれだけ立ち回れたかの勝負だろう．目標点は 50% だが，制限時間を考えると合格点はもう少し低いかも知れない．