解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2022年3月8日実施

1.　$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$，$\log_{10}11=1.041$，$\log_{10}17=1.230$ とするとき，

(1)　$\log_{10}5=0.$ $\boxed{アイウ}$ であることより，15^{20} の桁数は $\boxed{エオ}$ 桁である。

(2)　$\log_{10}3.4=0.$ $\boxed{カキク}$ であることより，15^{20} の最高位から 2 桁の数を求めると $\boxed{ケコ}$ である。ただし，「最高位から 2 桁の数」とは，1234 ならば「12」と答え，2021 ならば「20」と答えるとする。

解答

解答記号	正解
アイウ	699
エオ	24
カキク	531
ケコ	33

解説

(1)　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=1-0.301=0.\mathbf{699}$ である．また，

$$\begin{aligned}\log_{10}15^{20}&=20\times(\log_{10}3+\log_{10}5)\\&=20\times(0.477+0.699)\\&=20\times1.176\\&=23.52\end{aligned}$$

より $10^{23}\leqq15^{20}<10^{24}$ であるから，15^{20} の桁数は **24** 桁．

(2)　$\log_{10}3.3=\log_{10}\dfrac{33}{10}=\log_{10}3+\log_{10}11-1=0.477+1.041-1=0.518$ であり，

$\log_{10}3.4=\log_{10}\dfrac{34}{10}=\log_{10}2+\log_{10}17-1=0.301+1.230-1=0.\mathbf{531}$ である．

$$23+\log_{10}3.3\leqq\log_{10}15^{20}<23+\log_{10}3.4\iff3.3\times10^{23}\leqq15^{20}<3.4\times10^{23}$$

であることから，15^{20} の最高位から 2 桁の数は **33**.

注釈

$15^{20}=332525673007965087890625$ なので，**24** 桁で最高位から 2 桁の数は **33** である．

2. 実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ t$ が,

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=t$$

を満たし，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のうち，1 つが負で，残り 2 つが負でないとする。

(1) t のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{サシ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{ス}}$ である。

(2) t が (1) で求めた範囲にあるとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のうち負でない 2 つの値を $x_1,\ x_2(x_1 \leqq x_2)$ とすると，

$$\int_{\boxed{\text{サシ}}}^{\boxed{\text{ス}}}(x_2-x_1)dt=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

解答

解答記号	正解
サシ	-2
ス	0
$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\dfrac{9}{4}$

解説

(1) 解と係数の関係より，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は x の 3 次方程式

$$x^3-3x-t=0\cdots①$$

の 3 解である．$x^3-3x-t=0 \iff t=x^3-3x$ より，① の解は

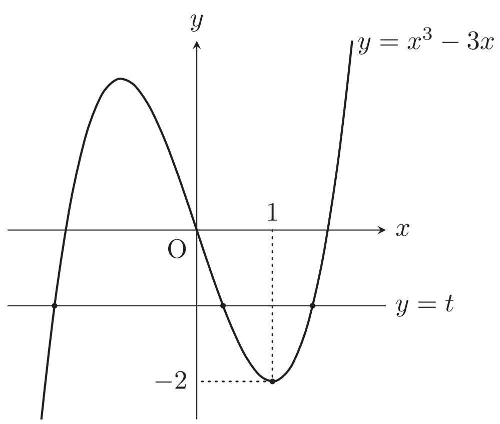
$$\begin{cases} y=t \\ y=x^3-3x \end{cases}$$

のグラフにおける 3 つの共有点の x 座標に等しい． $y=x^3-3x$ の増減を調べると，$y'=3x^2-3$ より，増減表は次のようになる．

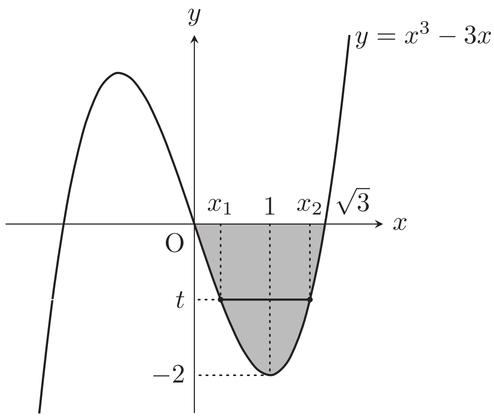
x		-1		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

これより，グラフは右図のようになるので，① の 3 つの解のうち 1 つが負の解， 2 つが負でない解となる条件は

$$\boldsymbol{-2 \leqq t \leqq 0}$$



(2)　求める定積分の値は，$y=x^3-3x$ のグラフと x 軸で囲まれた場所のうち，$x \geqq 0$ である部分の面積に等しいので，



$$\int_{-2}^{0}(x_2-x_1)dt=\int_{0}^{\sqrt{3}}\{-(x^3-3x)\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

もうひとつの負の解を $x=u$ とすると，

$$\begin{cases} x_1+x_2+u=0 \iff x_1+x_2=-u \\ x_1x_2+x_2u+ux_1=-3 \iff u(x_1+x_2)+x_1x_2=-3 \iff x_1x_2=u^2-3 \end{cases}$$

ゆえに $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=12-3u^2$ となる．
一方，$t=u^3-3u$ が成り立つので，

$$dt=(3u^2-3)du \quad \text{および}$$

t	$-2 \to 0$
u	$-2 \to -\sqrt{3}$

であるから，

$$\int_{-2}^{0}(x_2-x_1)dt=\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\sqrt{12-3u^2}(3u^2-3)du$$

ここで $u=2\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$du=2\cos\theta d\theta \quad \text{および}$$

u	$-2 \to -\sqrt{3}$
θ	$-\dfrac{\pi}{2} \to -\dfrac{\pi}{3}$

であるから，

$$(\text{与式})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\sqrt{12-12\sin^2\theta}(12\sin^2\theta-3)\cdot 2\cos\theta d\theta$$

$$=12\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}(4\sin^2\theta\cos^2\theta-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=12\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\sin^2 2\theta-\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=12\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}-\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=-6\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}(\cos 4\theta+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=-6\sqrt{3}\left[\frac{1}{4}\sin 4\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

3.

(1)　$t = x + \dfrac{1}{x}$ において，x が $x \geqq 2 - \sqrt{3}$ の範囲にあるとき t のとりうる値の範囲は $t \geqq$ $\boxed{\text{タ}}$ である。

(2)　$t \geqq$ $\boxed{\text{タ}}$ である t に対して，$t = x + \dfrac{1}{x}$ を満たす実数 x で $x \geqq 2 - \sqrt{3}$ である x の個数は，

$t =$ $\boxed{\text{タ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ $< t$ のとき，$\boxed{\text{ツ}}$ 個

$\boxed{\text{タ}}$ $< t \leqq$ $\boxed{\text{チ}}$ のとき，$\boxed{\text{テ}}$ 個

である。

(3)　実数の定数 a を変化させるとき，$x \geqq 2 - \sqrt{3}$ における方程式 $x^4 - ax^3 + (2a+7)x^2 - ax + 1 = 0$ の異なる実数解の個数は，

$a <$ $\boxed{\text{トナ}}$ のとき，$\boxed{\text{ニ}}$ 個

$a =$ $\boxed{\text{トナ}}$ のとき，$\boxed{\text{ヌ}}$ 個

$\boxed{\text{トナ}} < a < \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ のとき，$\boxed{\text{ヒ}}$ 個

$\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \leqq a$ のとき，$\boxed{\text{フ}}$ 個

である。

解答

解答記号	正解
タ	2
チ	4
ツ	1
テ	2

解答記号	正解
トナ	10
ニ	0
ヌ	1
$\dfrac{\text{ネノ}}{\text{ハ}}$	$\dfrac{21}{2}$
ヒ	2
フ	3

解説

(1)　$x > 0$ なので相加平均・相乗平均の関係より

$$t = x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \mathbf{2}$$

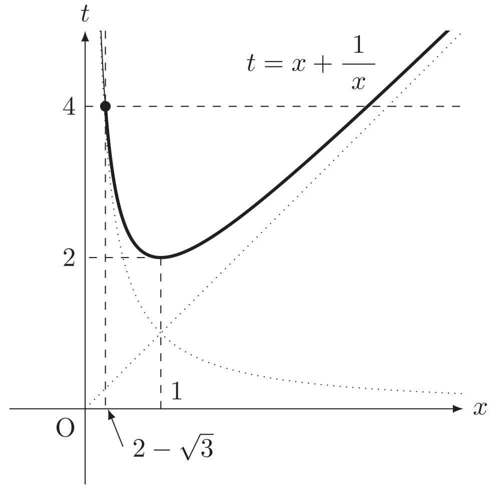
等号が成立するのは $x = \dfrac{1}{x} \iff x = 1$ のときであるが，これは $x \geqq 2 - \sqrt{3}$ を満たす．

(2)　$t = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフで考える．$x = 2 - \sqrt{3}$ のとき，

$$\begin{aligned} t &= 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

であることに注意する．

　グラフより x の個数は，$t = 2$，$\mathbf{4 < t}$ のとき **1** 個．$2 < t \leqq 4$ のとき **2** 個である．



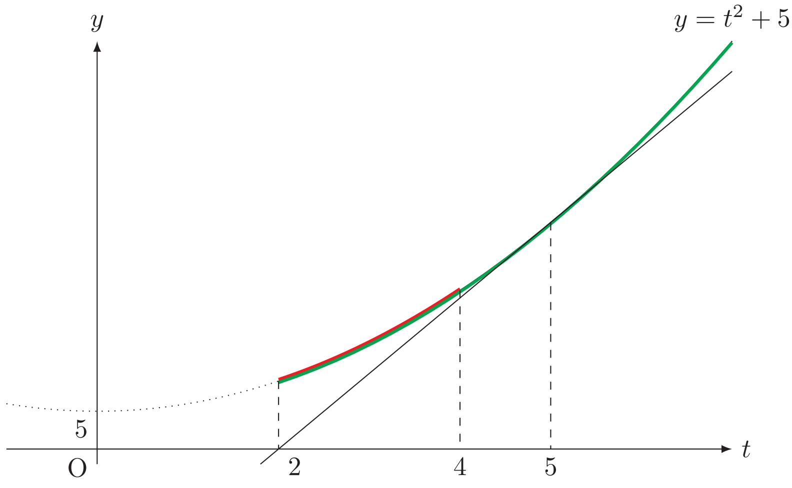
(3)　与式より $x \fallingdotseq 0$ であるので，両辺を x^2 で割ると

$$\begin{aligned} & x^2 - ax + (2a + 7) - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ \iff & \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a + 7 = 0 \\ \iff & t^2 - 2 - at + 2a + 7 = 0 \\ \iff & t^2 + 5 = a(t - 2) \cdots ① \end{aligned}$$

ここで，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ を用いた．$\begin{cases} y = t^2 + 5 \\ y = a(t - 2) \end{cases}$ について考える．この 2 つのグラフが接するのは，y を消去した t の 2 次方程式 $t^2 - at + 5 + 2a = 0$ の判別式 D が 0 となるときである．

$$D = a^2 - 4(5 + 2a) = (a + 2)(a - 10) = 0 \iff a = -2,\ 10$$

$a = 10$ のとき，この 2 つのグラフは $t = 5$ で接する．$t = 4$ のとき ① より $a = \dfrac{21}{2}$ である．



(2) の結果とグラフより，定数 a に対する x の個数は，

$a < \mathbf{10}$ のとき，**0** 個

$a = 10$ のとき，**1** 個

$10 < a < \dfrac{\mathbf{21}}{\mathbf{2}}$ のとき，**2** 個

$\dfrac{21}{2} \leqq a$ のとき，**3** 個

$\boxed{\text{別解}}$

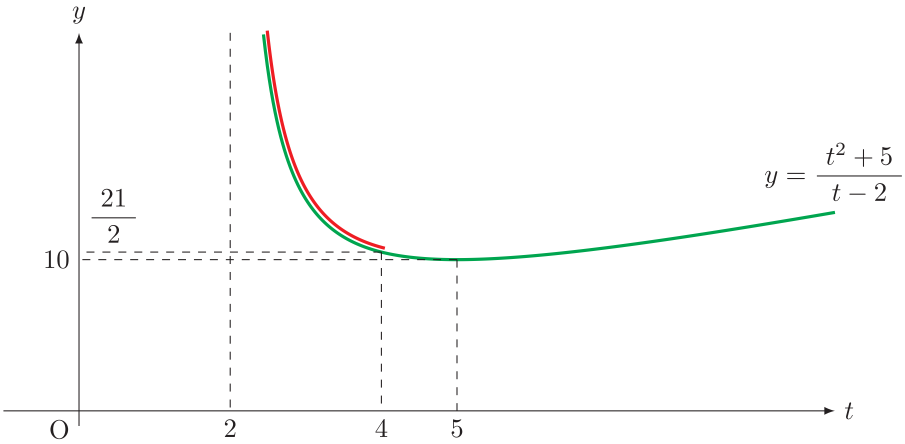
①は $t=2$ を解に持たないので，$\dfrac{t^2+5}{t-2}=a$ と定数分離できる．$t>2$ よりこの左辺に相加平均・相乗平均の関係を用いると，

$$y=\frac{t^2+5}{t-2}=\frac{t^2-4+9}{t-2}=t+2+\frac{9}{t-2}=t-2+\frac{9}{t-2}+4 \geqq 2\sqrt{9}+4=10$$

と最小値 10 をとることが分かる．等号が成立するのは，

$$t-2=\frac{9}{t-2} \iff (t-2)^2=9 \iff t-2=3 \iff t=5$$

のときである．



(2) の結果とグラフより，定数 a に対する x の個数は，

$a<\mathbf{10}$ のとき，**0** 個

$a=10$ のとき，**1** 個

$10<a<\boldsymbol{\dfrac{21}{2}}$ のとき，**2** 個

$\dfrac{21}{2}\leqq a$ のとき，**3** 個

4. 原点 O を中心とする円 C_1 と点 A(3, 0) を中心とする円 C_2 が異なる 2 点 P, Q で交わり，かつ，OP $\perp$ PA であるとする。$\angle$AOP $= \theta$ とおき，四角形 OPAQ から 2 つの円が重なる部分を除いた部分の面積を S とするとき，

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$S = \dfrac{\boxed{あ}\sqrt{\boxed{い}}}{2} - \dfrac{\boxed{うえ}}{\boxed{お}}\pi$ である。

(2) AP $= \boxed{か}\sin\theta$ だから，おうぎ形 APQ の面積は $\dfrac{\boxed{き}}{\boxed{く}}\left(\pi - \boxed{け}\theta\right)\sin^2\theta$ となり，三角形 APQ の面積は $\dfrac{\boxed{き}}{\boxed{く}}\sin^2\theta\sin\boxed{こ}\theta$ となる。

このことより，面積 S を θ を用いて表すと，

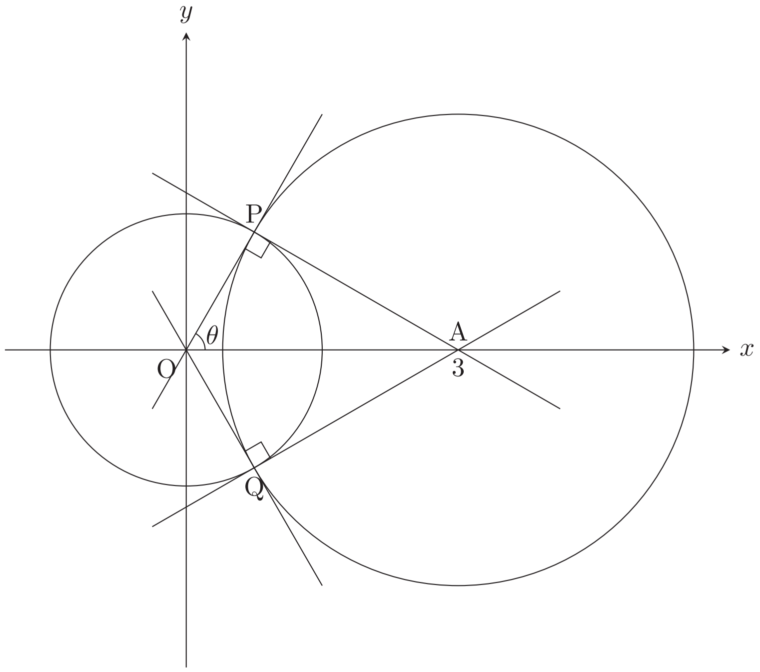
$$S = \boxed{さ}\sin 2\theta - \left(\boxed{し}\theta - \frac{\boxed{す}}{\boxed{せ}}\pi\right)\cos 2\theta - \frac{\boxed{そ}}{\boxed{た}}\pi$$

である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{あ\sqrt{い}}{2} - \dfrac{うえ}{お}\pi$	$\dfrac{9\sqrt{3}}{2} - \dfrac{15}{8}\pi$
$か\sin\theta$	$3\sin\theta$
$\dfrac{き}{く}\left(\pi - け\theta\right)\sin^2\theta$	$\dfrac{9}{2}\left(\pi - 2\theta\right)\sin^2\theta$
$\sin こ\theta$	$\sin 2\theta$
$さ\sin 2\theta - \left(し\theta - \dfrac{す}{せ}\pi\right)\cos 2\theta - \dfrac{そ}{た}\pi$	$9\sin 2\theta - \left(9\theta - \dfrac{9}{4}\pi\right)\cos 2\theta - \dfrac{9}{4}\pi$

解説



以下，四角形 OPAQ の面積を T，おうぎ形 OPQ とおうぎ形 APQ の重なった部分の面積を U とする．

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\mathrm{OP} = \dfrac{3}{2}$，$\mathrm{AP} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ であるので，

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

であり，おうぎ形 OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{3}{4}\pi$，おうぎ形 APQ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9}{8}\pi$ であるので，

$$U = \frac{3}{4}\pi + \frac{9}{8}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{15}{8}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

したがって，

$$S = T - U = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{8}\pi}$$

(2) $\triangle\mathrm{OAP}$ は直角三角形であるので三角比の定義から $\mathrm{AP} = \mathbf{3}\sin\theta$，$\mathrm{OP} = 3\cos\theta$ である．
おうぎ形 APQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(3\sin\theta)^2\cdot(\pi - 2\theta) = \boldsymbol{\frac{9}{2}}(\pi - \mathbf{2}\theta)\sin^2\theta$$

また，三角形 APQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(3\sin\theta)^2\cdot\sin(\pi - 2\theta) = \frac{9}{2}\sin^2\theta\sin\mathbf{2}\theta$$

同様に，おうぎ形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(3\cos\theta)^2\cdot 2\theta = 9\theta\cos^2\theta$$

また，三角形 OPQ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(3\cos\theta)^2\cdot\sin 2\theta = \frac{9}{2}\cos^2\theta\sin 2\theta$$

以上から

$$T = \frac{9}{2}\sin^2\theta\sin 2\theta + \frac{9}{2}\cos^2\theta\sin 2\theta = \frac{9}{2}\sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{9}{2}(\pi - 2\theta)\sin^2\theta + 9\theta\cos^2\theta - \frac{9}{2}\sin 2\theta \\
&= \frac{9}{2}\left\{(\pi - 2\theta)\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\theta\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right\} - \frac{9}{2}\sin 2\theta \\
&= \left(9\theta - \frac{9}{4}\pi\right)\cos 2\theta + \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}\sin 2\theta
\end{aligned}$$

したがって求める面積 S は

$$S = T - U = \mathbf{9}\sin 2\theta - \left(\mathbf{9}\theta - \boldsymbol{\frac{9}{4}}\pi\right)\cos 2\theta - \boldsymbol{\frac{9}{4}}\pi$$

注釈

面積 T については (1) のように

$$T = \frac{1}{2}\cdot 3\sin\theta\cdot 3\cos\theta\times 2 = 9\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{2}\sin 2\theta$$

としてもよい．

5. n を 2 以上の自然数とすると，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \boxed{\text{ち}}^{\,n} - \boxed{\text{つ}}$$

であるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ が収束するような実数 r の値の範囲は，

$$r < \boxed{\text{てと}},\quad \boxed{\text{な}} \leqq r$$

また，$r = \boxed{\text{な}}$ のときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ の極限値は，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \boxed{\text{に}}$$

である。

解答

解答記号	正解
ち^n − つ	$2^n - 2$
$r <$ てと，な $\leqq r$	$r < -2$，$2 \leqq r$
に	1

解説

二項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k}$ において，$x = y = 1$ を代入すると次の等式が得られる．

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdots ①$$

よって ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ と表されることから，等式 ① により，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} &= \sum_{k=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_k \\ &= {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \\ &= ({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n) - ({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_n) \\ &= 2^n - (1+1) \\ &= \boldsymbol{2^n - 2}\end{aligned}$$

この結果から，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ を次のように式変形して考えることができる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2}{r^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdots ②$$

② 式の極限 I を考えると，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=1$ であることから，極限 I の収束条件は $-1<\dfrac{2}{r}\leqq 1$ であることになる．したがって，極限 I が収束するような r の値の範囲は $\boldsymbol{r<-2,\ 2\leqq r}$ となる．また，$r=2$ のときの極限 I の値は $\mathbf{1}$ である．

6\. 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ について，考える。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値は $x=\boxed{\text{ぬ}}$ のとき $\boxed{\text{ね}}$ である。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸と直線 $x=0,\ x=1$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{の}}}{\boxed{\text{は}}}\pi$ である。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸と直線 $x=0,\ x=1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ひ}}}{\boxed{\text{ふ}}}\pi-\log\boxed{\text{へ}}\right)\pi$ である。

解答

解答記号	正解
ぬ	1
ね	1
$\dfrac{\text{の}}{\text{は}}$	$\dfrac{1}{4}$
$\dfrac{\text{ひ}}{\text{ふ}}\pi-\log\text{へ}$	$\dfrac{1}{2}\pi-\log 2$

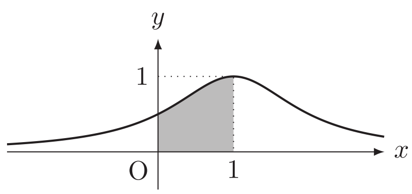
解説

(1) $f'(x)=-\dfrac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}$ であるから，$f'(x)=0$ のとき，$x=1$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ であるから，増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

ゆえに，$f(x)$ の極大値は $x=\mathbf{1}$ のとき $\mathbf{1}$ である．

(2) (1) より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになるので，右図灰色部分の面積を求めればよい．求める面積を S とすると，



$$S=\int_0^1\frac{1}{x^2-2x+2}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

ここで，$x-1=\tan\theta$ とおくと，

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$ および

x	$0\to1$
θ	$-\dfrac{\pi}{4}\to0$

であるから，

$$S=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\pi$$

(3)　求める体積を V とすると，円筒型の分割（いわゆるバウムクーヘン分割）を行うことにより

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi xy dx \\ &= \pi\int_0^1 \frac{2x}{x^2-2x+2}dx \\ &= \pi\int_0^1 \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+2}\right)dx \\ &= \pi\left(\Big[\log|x^2-2x+2|\Big]_0^1+2S\right) \\ &= \pi\left(-\log 2+\frac{1}{2}\pi\right) \\ &= \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\pi-\log\boldsymbol{2}\right)\pi \end{aligned}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$y=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ を x について解くと，$x=1\pm\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}$ となる．体積は，$y=f(x)$ の $x\leqq 1$ の部分を考えればよいので，$x=1-\sqrt{\dfrac{1}{y}-1}$ である．よって，

$$\begin{aligned} V &= \pi-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dy \\ &= \pi-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1-\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)^2dy \\ &= \pi-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y}-2\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)dy \\ &= \pi-\pi\Big[\log|y|\Big]_{\frac{1}{2}}^1+2\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{1}{y}-1}dy \\ &= \left(1-\log 2+2\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{1}{y}-1}dy\right)\pi \end{aligned}$$

ここで，定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{1}{y}-1}dy$ について考える．$y=\cos^2\theta$ とおくと，

$dy=-2\cos\theta\sin\theta d\theta$　および

y	$\frac{1}{2}\to 1$
θ	$\frac{\pi}{4}\to 0$

であるから，

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{1}{y}-1}dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \tan\theta\cdot(-2\cos\theta\sin\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)d\theta \\ &= \left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ゆえに，求める体積は，

$$V = \left\{1 - \log 2 + 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\}\pi$$

$$= \left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\pi - \log \boldsymbol{2}\right)\pi$$

講評

1.［指数対数］（やや難）オーソドックスな桁数問題であるが，最後の「最高位から 2 桁」で戸惑った受験生が多かっただろう．そこ以外は落とせない．

2.［数学 II の微積分］（やや難）3 次方程式の解と係数の関係を利用して，方程式の解の議論や面積の計算をする問題．(2) では，定積分の意味を考えれば x 軸と曲線で囲まれた部分の面積を求めればよいことがわかるが，気付いた受験生は少なかったかもしれない．

3.［方程式の解］（標準）置き換えを含む方程式において解の個数を求める典型問題．t と x の対応をしっかり考える必要があり，完答は難しかったかもしれない．

4.［図形と方程式，三角関数］（標準）2 交点をもつ 2 円の共通部分などについての面積の問題である．後半では三角関数の処理などやや計算が繁雑である．

5.［極限，二項定理］（やや易）冒頭で二項定理の利用に気付けないとお手上げとなってしまうが，そこがクリアできればあとは易しい．差がつきそうな問題である．

6.［数 III の微積分］（やや難）分数関数に関して，増減や面積，体積を求める問題．(1)(2) は易しく落とせない．(3) の体積ではバウムクーヘン分割が利用できるとよいが，x^2 を y で表す方針でも計算できる．

典型題が多いものの，解きにくいところが散在しており，高得点をとるのは簡単ではない．2021 年度後期，2022 年度前期に比べると処理のスピードと精度で得点差がつきそうではある．目標は 70%．

解析系の出題の割合が例年よりも多い．また，確率の出題がないのも目を引く．