医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

近畿大学 医学部（推薦） 数学

2021年 11月21日実施

1 空欄に入る数を求めよ。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さは $\boxed{\ ア\ }$ である。

(2) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値は $\boxed{\ イ\ }$ である。

(3) 1 辺の長さが 1 の正五角形の面積は $\boxed{\ ウ\ }$ である。

(4) 1 辺の長さが 1 の正五角形の各頂点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の 5 つの円を考える。この 5 つの円すべてに外接する円の半径は $\boxed{\ エ\ }$ である。

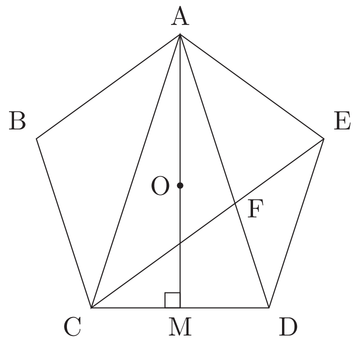
解答

ア $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　イ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　ウ $\dfrac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}\left(=\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\right)$

エ $\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}-\dfrac{1}{2}$

解説

与えられた正五角形の頂点を図のように A，B，C，D，E とし，AD と CE の交点を F とおく．



(1) 四角形 ABCF はひし形なので AF = CF = 1 である．DF $= x$ とおくと AC = AD $= 1+x$ ということになる．ここで 2 つの二等辺三角形 △ACD と △CDF は相似であるから，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CD}=\mathrm{CD}:\mathrm{DF} \iff (1+x):1=1:x$$

がわかる．これより $x^2+x-1=0$ を解いて $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because x>0)$ を得るので，

$$(\text{対角線の長さ})=1+x=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

となる.

(2) CD の中点を M とおく．直角三角形 ACM において $\angle \mathrm{ACM} = \dfrac{2\pi}{5}$ であるから，

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CA}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

である.

$\boxed{\text{注釈}}$

正五角形の対角線の長さや，$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の求め方には，ベクトルの利用，三角関数の倍角公式の利用，1 の虚数 5 乗根の利用などいろいろな解法が存在する.

(3) 正五角形の外接円の中心を O，半径を R とすると三角形 OCD の面積 S は $S = \dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{5}$ で与えられる．ここで $\triangle$OCD に関する余弦定理より $1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ であるから

$$R^2 = \frac{1}{2-2\cos\frac{2\pi}{5}} = \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

である．また

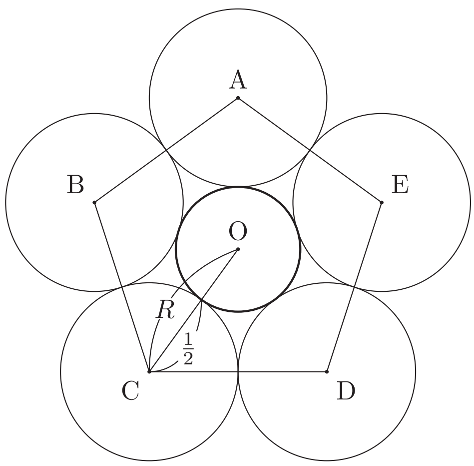
$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

もわかるから，求める正五角形の面積は

$$5S = \frac{5}{2}\times\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \boldsymbol{\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}}\ \left(= \boldsymbol{\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}}\right)$$

である.

(4) 次の図より，答は明らかに $R - \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} - \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10} - \dfrac{1}{2}}$ とわかる.



2 自然数 n に対して，n 人をいくつかの部屋に分けたい。ただし，各部屋には必ず誰か 1 人は入るものとする。

(1) 部屋 1 と部屋 2 への分け方は何通りあるか。

(2) 部屋 1 と部屋 2 と部屋 3 への分け方は何通りあるか。

(3) 部屋 1 と部屋 2 と部屋 3 と部屋 4 への分け方は何通りあるか。

(4) $k \leqq n$ を満たす自然数 k について，部屋 1 から部屋 k への分け方は何通りか。二項係数と記号 $\sum$ を用いた式で表せ。

解答

(1) $2^n - 2$　(2) $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$　(3) $4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4$　(4) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i {}_k\mathrm{C}_i (k-i)^n$

解説

(1) n 人を異なる 2 つの部屋に分ける分け方は，空の部屋ができる場合も含めると 2^n 通りである．そこから，部屋 1 が空になる場合の 1 通りと，部屋 2 が空になる場合の 1 通りを引くので，求める分け方は，$\boldsymbol{2^n - 2}$ **通り**．

(2) n 人を異なる 3 つの部屋に分ける分け方は，空の部屋ができる場合も含めると 3^n 通りである．

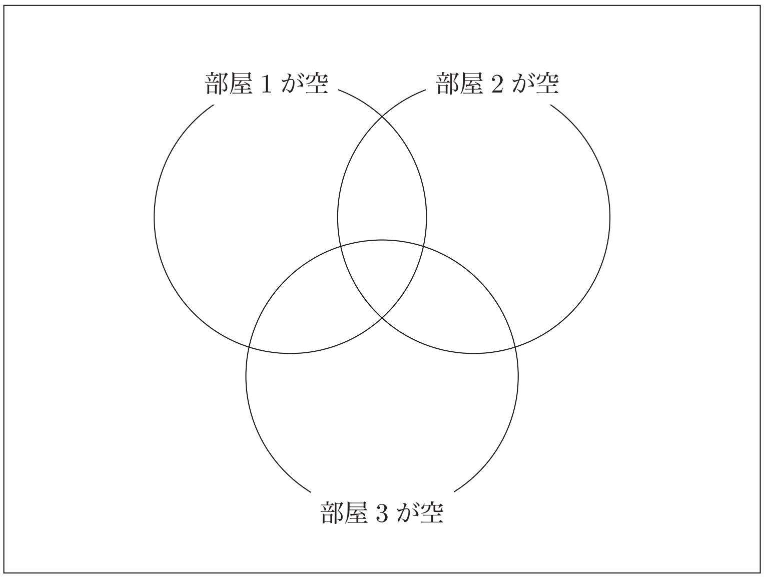
そのうち部屋 1 が空になるものは 2^n 通り，部屋 2 が空になるものは 2^n 通り，部屋 3 が空になるものは 2^n 通りである．

また，部屋 1 と部屋 2 が空になるものは 1^n 通り，部屋 1 と部屋 3 が空になるものは 1^n 通り，部屋 2 と部屋 3 が空になるものは 1^n 通りであり，部屋 1 と部屋 2 と部屋 3 が空になるものは 0 通りである．

空の部屋が生じる場合の数は，

$$\begin{aligned}&(\text{部屋 1 が空}) + (\text{部屋 2 が空}) + (\text{部屋 3 が空})\\ &- (\text{部屋 1 と部屋 2 が空}) - (\text{部屋 1 と部屋 3 が空}) - (\text{部屋 2 と部屋 3 が空})\\ &+ (\text{部屋 1 と部屋 2 と部屋 3 が空})\end{aligned}$$

となるので（下図参照），求める場合の数は，$3^n - (2^n + 2^n + 2^n - 1^n - 1^n - 1^n + 0) = \boldsymbol{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}$ **通り**である．



(3) n 人を異なる 4 つの部屋に分ける分け方は，空の部屋ができる場合も含めると 4^n 通りである．

前問と同様に，空の部屋が生じる場合の数は，

$$
\begin{aligned}
&(\text{部屋 } 1 \text{ が空}) + (\text{部屋 } 2 \text{ が空}) + (\text{部屋 } 3 \text{ が空}) + (\text{部屋 } 4 \text{ が空}) \\
&- (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 2 \text{ が空}) - (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 3 \text{ が空}) - (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) \\
&- (\text{部屋 } 2 \text{ と部屋 } 3 \text{ が空}) - (\text{部屋 } 2 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) - (\text{部屋 } 3 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) \\
&+ (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 2 \text{ と部屋 } 3 \text{ が空}) + (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 2 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) \\
&+ (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 3 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) + (\text{部屋 } 2 \text{ と部屋 } 3 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空}) \\
&- (\text{部屋 } 1 \text{ と部屋 } 2 \text{ と部屋 } 3 \text{ と部屋 } 4 \text{ が空})
\end{aligned}
$$

である．ここで，

- 特定の 1 つの部屋が空になる場合の数は 3^n 通りで，その特定の 1 つの部屋の選び方は ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り．
- 特定の 2 つの部屋が空になる場合の数は 2^n 通りで，その特定の 2 つの部屋の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り．
- 特定の 3 つの部屋が空になる場合の数は 1^n 通りで，その特定の 3 つの部屋の選び方は ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り．
- 4 つすべての部屋が空になる場合の数は 0 通り．

となるので，求める場合の数は，

$$4^n - ({}_4\mathrm{C}_1 \cdot 3^n - {}_4\mathrm{C}_2 \cdot 2^n + {}_4\mathrm{C}_3 \cdot 1^n - 0) = \boldsymbol{4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4}\ \textbf{通り}$$

である．

(4) 前問までと同様に考えると，求める場合の数は

$$k^n - {}_k\mathrm{C}_1(k-1)^n + {}_k\mathrm{C}_2(k-2)^n - {}_k\mathrm{C}_3(k-3)^n + \cdots + (-1)^{k-1}{}_k\mathrm{C}_{k-1}1^n = \boldsymbol{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i{}_k\mathrm{C}_i(k-i)^n}$$

である．

$\boxed{\text{参考}}$ 包除原理

n 個の和集合の要素の個数についての定理である．以下，集合 A の要素の個数を $|A|$ と表す．

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
&= (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|) \\
&\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\
&\quad - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

的中!!

重要問題集

6 人を 3 つのグループ A，B，C に分ける方法は何通りあるか．2 通りの方法で求めよ．ただしどのグループも 1 人以上からなるものとする．

2 巡目テキスト

6 個の球を 3 個の箱に分配したい．空き箱を許さない場合，何通りあるかを以下のそれぞれの場合について求めよ．

(1)　球も箱も区別する場合．

3 $f(x)$ を x の整式とする。すべての実数 x に対して，

$$2f(x+2)-3f(x+1)+f(x)=3x^2+15x+6$$

を満たし，$f(0)=6$，$f(1)=0$ とする。

(1) $f(2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $a>0$ とする。

$$\int_0^a |f(x+1)-f(x)|dx=17$$

のとき，定数 a の値を求めよ。

解答

$2f(x+2)-3f(x+1)+f(x)=3x^2+15x+6$ $\cdots\cdots(*)$ とする．

(1) $(*)$ に $x=0$ を代入すると $2f(2)-3f(1)+f(0)=6$ を得る．$f(0)=6$，$f(1)=0$ を用いることにより，$f(2)=\mathbf{0}$.

(2) $f(x)$ が n 次 $(n \geqq 1)$ の整式であるとして，

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \quad \cdots\cdots①$$

とおく．ただし $a_n \neq 0$ である．このとき

$$f(x+2)=a_n(x+2)^n+a_{n-1}(x+2)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1(x+2)+a_0\cdots\cdots②$$

$$f(x+1)=a_n(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots+a_1(x+1)+a_0\cdots\cdots③$$

である．$(*)$ の左辺は，$2\times②-3\times③+①$ であるから，x^n の係数は 0 となる．$(*)$ の左辺の x^{n-1} の係数に着目すると，

$$2a_n\cdot {}_n\mathrm{C}_1\cdot 2+2a_{n-1}-3a_n\cdot {}_n\mathrm{C}_1\cdot 1-3a_{n-1}+a_{n-1}=na_n$$

となる．ここで $na_n \neq 0$ なので $(*)$ の左辺は $n-1$ 次であり，$(*)$ の右辺が 2 次式であることから $n=3$ であることがわかる．したがって $f(x)$ は 3 次式である．また，$(*)$ の左辺の 2 次の係数は $3a_3$ であり，$(*)$ の右辺からこれが 3 に等しいので，$a_3=1$ とわかる．これと $f(1)=f(2)=0$ から

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+p)$$

とおけ，$f(0)=6$ から $p=3$ とわかる．したがって，

$$f(x)=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+3)} \quad (f(x)=\boldsymbol{x^3-7x+6}\text{ でも可})$$

であり，これは題意を満たす．

別解

k を整数とする．$F(k)=f(k+1)-f(k)$ とおくと $F(0)=-6$ であり，与式は以下のように変形できる．

$$
\begin{aligned}
&2F(k+1)=F(k)+3k^2+15k+6\\
\iff& 2\{F(k+1)-3(k+1)^2-3(k+1)+6\}=F(k)-3k^2-3k+6\\
\iff& F(k+1)-3(k+1)^2-3(k+1)+6=\frac{1}{2}\{F(k)-3k^2-3k+6\}\\
\iff& F(k)-3k^2-3k+6=\left(\frac{1}{2}\right)^k\{F(0)-3\cdot 0^2-3\cdot 0+6\}=0\\
&\therefore F(k)=f(k+1)-f(k)=3k^2+3k-6\cdots④
\end{aligned}
$$

ここで，④ より k が 2 以上の整数のとき，

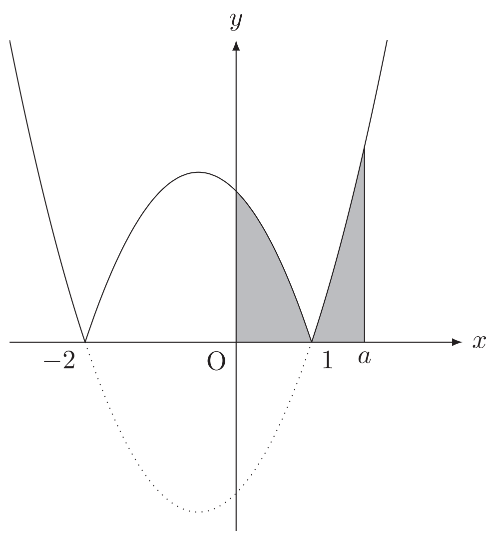
$$
\begin{aligned}
f(k)-f(1)&=\sum_{l=1}^{k-1}\{f(l+1)-f(l)\}\\
&=\sum_{l=1}^{k-1}(3l^2+3l-6)\\
&=3\cdot\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}+3\cdot\frac{k(k-1)}{2}-6(k-1)\\
&=k^3-7k+6\\
\therefore f(k)&=k^3-7k+6\cdots⑤
\end{aligned}
$$

⑤ より $G(x)=f(x)-(x^3-7x+6)$ とすると，$G(x)$ は整式でありかつ $G(x)=0$ が無限個の 2 以上の整数 $x=k$ について成り立つが，そのような整式は $G(x)=0$ しかありえず，$f(x)=x^3-7x+6$ とわかる．

(3)

$$
\begin{aligned}
f(x+1)-f(x)&=x(x-1)(x+4)-(x-1)(x-2)(x+3)\\
&=(x-1)\{x(x+4)-(x-2)(x+3)\}\\
&=3(x-1)(x+2)\\
&=3(x^2+x-2)
\end{aligned}
$$

である．$\displaystyle\int_0^a |f(x+1)-f(x)|dx$ は，下図灰色部分の面積を表しているので， この定積分の値は a について単調増加である．



$a=1$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x+1)-f(x)|dx &= -3\int_0^1 (x^2+x-2)dx\\ &= -3\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^1\\ &= -3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\\ &= \frac{7}{2} < 17\end{aligned}$$

より，$a>1$ であることがわかる．よって，

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x+1)-f(x)|dx &= -3\int_0^1 (x^2+x-2)dx + 3\int_1^a (x^2+x-2)dx\\ &= \frac{7}{2}+3\int_1^a (x^2+x-2)dx\end{aligned}$$

であり，与条件からこれが 17 に等しいので，

$$\int_1^a (x-1)(x+2)dx = \frac{9}{2}$$

となる．

$$\begin{aligned}\int_1^a (x-1)(x+2)dx &= \int_1^a (x-1)(x-1+3)dx\\ &= \int_1^a \{(x-1)^2+3(x-1)\}dx\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{3}{2}(x-1)^2\right]_1^a\\ &= \frac{1}{3}(a-1)^3+\frac{3}{2}(a-1)^2\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{1}{3}(a-1)^3+\frac{3}{2}(a-1)^2=\frac{9}{2} \iff 2(a-1)^3+9(a-1)^2-27=0$$

ここで，$a-1=b\ (>0)$ とおくと，

$$2b^3+9b^2-27=0 \iff (2b-3)(b+3)^2=0$$

であるから，$b>0$ より $b=\dfrac{3}{2}$ である．このとき，$a=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ である．

講評

$\boxed{1}$［図形と計量］（標準～やや難）正五角形に関する問題で，経験の有無で大きく差がつくだろう．(1)(2) は典型問題であり正答したい．(3) は単純ではあるがやや計算が煩雑か．なお答えに二重根号が含まれており，整理の仕方によって書き方が変わる．(4) は図を丁寧に描けばそれほど難しくはない．

$\boxed{2}$［場合の数］（やや難）区別のつくものを区別のつく部屋に分ける典型的な分配問題．いわゆる「包除の原理」を知っていれば最後までただちに答えにたどり着くことができるが，やや高度なため最後までたどり着いた受験生は少なかったかもしれない．(2) までは基本的な問題であるから押さえておきたい．

$\boxed{3}$［数学 II の微積分］（やや難）前半は整式についての関数方程式の問題である．(2) ではまず $f(x)$ の次数を決定するのだが，ここが突破できたかどうかで得点が大きく左右されるだろう．もし次数が厳密に決定できなくても，3 次だと推測してそれ以降を解き進めたいところである．(3) では，定積分についての処理を工夫したい．

例年と比べると，各大問ともに後半が得点しにくく，高得点をとるのは難しいだろう．$\boxed{1}$ の前半，$\boxed{2}$ の (1)～(3)，$\boxed{3}$ の (1) を何とか得点した上で，それ以外の設問でうまく立ち回れるかどうかの勝負になる．目標は 55%．