解答速報

近畿大学医学部（前期）　数学

2022年1月30日実施

解説動画公開中！

https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q

1 鋭角三角形 ABC があり，$AB=13$，$BC=15$ であるとする。点 A から辺 BC に下ろした垂線と BC との交点を D とおき，点 D が辺 BC を $1:2$ に内分するときについて考える。

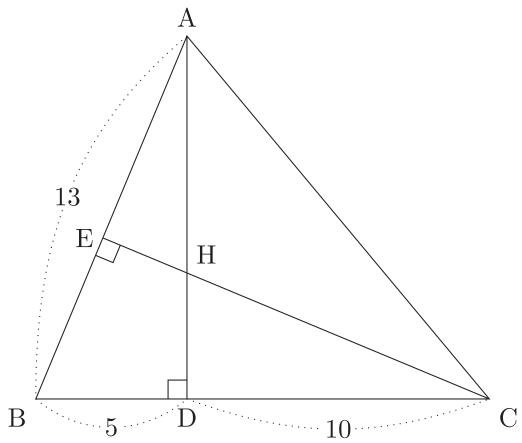
(1) $AD=\boxed{\text{ア}}$，$AC=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 点 C から辺 AB に下ろした垂線と AB との交点を E とおき，直線 AD と直線 CE との交点を H とおく。このとき $CH=\boxed{\text{ウ}}$，$\dfrac{BE}{AE}=\boxed{\text{エ}}$，$\dfrac{AH}{DH}=\boxed{\text{オ}}$ である。また，4 点 B, D, E, H は同一円周上にあり，その円の半径は $\boxed{\text{カ}}$ である。

解答

(1) ア 12　イ $2\sqrt{61}$　(2) ウ $\dfrac{65}{6}$　エ $\dfrac{75}{94}$　オ $\dfrac{47}{25}$　カ $\dfrac{5\sqrt{61}}{12}$

解説



(1) 点 D は BC を $1:2$ に内分するので，$BD=5$，$CD=10$ である．三平方の定理より，

$$AD=\sqrt{13^2-5^2}=\mathbf{12},\quad AC=\sqrt{12^2+10^2}=\mathbf{2\sqrt{61}}$$

(2)　$\triangle$ABD, $\triangle$CBE, $\triangle$CHD はすべて相似なので,

$$\mathrm{BE} = 15 \cdot \frac{5}{13} = \frac{75}{13}$$
$$\mathrm{CH} = 10 \cdot \frac{13}{12} = \boldsymbol{\frac{65}{6}}$$
$$\mathrm{DH} = 10 \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{6}$$

である．よって,

$$\mathrm{AE} = 13 - \frac{75}{13} = \frac{94}{13}$$
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}} = \boldsymbol{\frac{75}{94}}$$
$$\mathrm{AH} = 12 - \frac{25}{6} = \frac{47}{6}$$
$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{DH}} = \boldsymbol{\frac{47}{25}}$$

となる．また，$\angle\mathrm{BEH} = \angle\mathrm{BDH} = \dfrac{\pi}{2}$ なので，四角形 BDHE は BH を直径とする円に内接し，その半径は,

$$\frac{1}{2}\sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{6}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{61}}{12}}$$

である．

2 ある地域で発生した感染症 A について，次の感染モデルを考える。

感染症 A は，1 日に感染者 1 人から他者 1 人に感染する。以下では，感染症 A に感染した翌日から数えて n 日目を「感染 n 日目」（ただし $n=1, 2, \ldots$）ということにする。感染症 A は，対策を講じなければ，感染 1 日目から 3 日間は 1 日に感染者 1 人から他者 1 人に感染し，感染 4 日目の感染者からは感染せず，感染 5 日目に回復して感染症 A の感染者ではなくなる。また，調査 1 日目に新規感染者が 1 人いたとする。

このモデルの下での感染者数は，調査 1 日目 1 人，調査 2 日目 2 人，調査 3 日目 4 人，調査 4 日目 8 人，調査 5 日目 14 人となる。地域住民の数が十分に多いと仮定して，次の問いに答えよ。ただし，他地域からの感染等，感染モデルに含まれないその他一切の影響を考えなくてよいものとする。

(1) 上記感染モデルの下での調査 10 日目の感染者数および新規感染者数を求めよ。

(2) 地域住民全員が感染予防対策を施していれば，感染 3 日目以降の感染症 A も他者に感染することはない。この修正モデルの下での調査 10 日目の感染者数および新規感染者数を求めよ。

(3) 地域住民全員が感染予防対策を施し，さらにワクチンを接種していれば，感染 2 日目以降の感染症 A も他者に感染することはない。この修正モデルの下での調査 10 日目の感染者数および新規感染者数を求めよ。

解答

(1) 感染者数：298，新規感染者数：149　(2) 感染者数：123，新規感染者数：55　(3) 感染者数：4，新規感染者数：1
注：ここでは「新規感染者」を「感染 1 日目の感染者」とし，感染した当日は「感染者数」に計上しないと解釈した．

解説

(1) 感染当日から 6 日間の状況を次のように解釈する．

- 「感染 0 日目」 ⋯ 感染当日．この日は感染者数には含まれない．
- 「感染 1 日目」 ⋯ 新規感染者．感染者に含まれる．他者 1 人に感染させる．
- 「感染 2，3 日目」 ⋯ 感染者に含まれる．他者 1 人に感染させる．
- 「感染 4 日目」 ⋯ 感染者に含まれる．他者に感染させない．
- 「感染 5 日目」 ⋯ 感染者ではなくなる．

これを踏まえて，以下のルールに基づいて表を作成する．

- 調査 1 日目では，感染者は 1 人（感染 1 日目）だけである．また，その感染者から感染させられた人（感染 0 日目）も 1 人いるが，これは感染者には含まれないので「感染者数」は 1 となる．
- $k \geqq 1$ において，調査 k 日目の「感染 0, 1, 2, 3 日目」の人数が，それぞれ調査 $k+1$ 日目の「感染 1, 2, 3, 4 日目」の人数にスライドする．
- 「感染 0 日目」の人数は，同調査日の「感染 1, 2, 3 日目」の人から感染した人数になるので，それらの和になる．
- 「感染者数」は，同調査日の「感染 1, 2, 3, 4 日目」の人数の和になる．

感染日数	感染 0 日目	感染 1 日目	感染 2 日目	感染 3 日目	感染 4 日目	感染 5 日目	感染者数
調査 1 日目	1	1	0	0	0	0	1
調査 2 日目	2	1	1	0	0	0	2
調査 3 日目	4	2	1	1	0	0	4
調査 4 日目	7	4	2	1	1	0	8
調査 5 日目	13	7	4	2	1	1	14
調査 6 日目	24	13	7	4	2	1	26
調査 7 日目	44	24	13	7	4	2	48
調査 8 日目	81	44	24	13	7	4	88
調査 9 日目	149	81	44	24	13	7	162
調査 10 日目	274	**149**	81	44	24	13	**298**

上の表は，次の漸化式をもとに計算していることになる．

調査 n 日目の新規感染者数（感染 1 日目の人数）を a_n，感染者数を b_n とする．このとき，a_n について次の漸化式が成り立つので，これより，a_n の値は下表のようになる．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geqq 4)$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

また，b_n については，次式が成り立つ．

$$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 4$$
$$b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geqq 4)$$

これより $a_{10} = 149,\ b_{10} = 298$ を得る．ゆえに，**感染者数は 298，新規感染者は 149** である．

別解

次の表で考えてもよい．

	調査 1 日目	調査 2 日目	調査 3 日目	調査 4 日目	調査 5 日目	調査 6 日目	調査 7 日目	調査 8 日目	調査 9 日目	調査 10 日目
第 1 感染者の推移	1	1	1	1						
第 2 感染者の推移	1	1	1	1	1					
第 3 感染者の推移		2	2	2	2	2				
第 4 感染者の推移			4	4	4	4	4			
第 5 感染者の推移				7	7	7	7	7		
第 6 感染者の推移					13	13	13	13	13	
第 7 感染者の推移						24	24	24	24	24
第 8 感染者の推移							44	44	44	44
第 9 感染者の推移								81	81	81
第 10 感染者の推移									149	149
第 11 感染者の推移										274

感染 0 日目の感染者　感染 1 日目の感染者　感染 2 日目の感染者

感染 3 日目の感染者　感染 4 日目の感染者

(2)　(1) と同様に考えるが，感染 3 日目以降は，他者に感染することはないので，次のようなルールの変更がある．

- 「感染 0 日目」の人数は，同調査日の「感染 1, 2 日目」の人から感染した人数になるので，それらの和になる．

これを踏まえると次のような表ができる.

感染日数	感染 0 日目	感染 1 日目	感染 2 日目	感染 3 日目	感染 4 日目	感染 5 日目	感染者数
調査 1 日目	1	1	0	0	0	0	1
調査 2 日目	2	1	1	0	0	0	2
調査 3 日目	3	2	1	1	0	0	4
調査 4 日目	5	3	2	1	1	0	7
調査 5 日目	8	5	3	2	1	1	11
調査 6 日目	13	8	5	3	2	1	18
調査 7 日目	21	13	8	5	3	2	29
調査 8 日目	34	21	13	8	5	3	47
調査 9 日目	55	34	21	13	8	5	76
調査 10 日目	89	**55**	34	21	13	8	**123**

(1) と同様に漸化式を作ると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\
&a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geqq 3) \\
&b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 4 \\
&b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geqq 4)
\end{aligned}
$$

これより $a_{10} = 55$, $b_{10} = 123$ を得る. ゆえに, **感染者数は 123, 新規感染者は 55** である.

(3) (1), (2) と同様に考えるが, 感染 2 日目以降は, 他者に感染することはないので, 次のようなルールの変更がある.

- 「感染 0 日目」の人数は, 同調査日の「感染 1 日目」の人から感染した人数になる.

これを踏まえると次のような表ができる.

感染日数	感染 0 日目	感染 1 日目	感染 2 日目	感染 3 日目	感染 4 日目	感染 5 日目	感染者数
調査 1 日目	1	1	0	0	0	0	1
調査 2 日目	1	1	1	0	0	0	2
調査 3 日目	1	1	1	1	0	0	3
調査 4 日目	1	1	1	1	1	0	4
調査 5 日目	1	1	1	1	1	1	4
調査 6 日目	1	1	1	1	1	1	4
調査 7 日目	1	1	1	1	1	1	4
調査 8 日目	1	1	1	1	1	1	4
調査 9 日目	1	1	1	1	1	1	4
調査 10 日目	1	**1**	1	1	1	1	**4**

(1), (2) と同様に漸化式を作ると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1 \\
&a_n = a_{n-1} \quad (n \geqq 2) \\
&b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 3 \\
&b_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geqq 4)
\end{aligned}
$$

これより $a_{10} = 1$, $b_{10} = 4$ を得る. ゆえに, **感染者数は 4, 新規感染者は 1** である.

解説動画公開中！
https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a>0$ とし，$f(x)=x^2+2ax$，$g(x)=-x^2+4ax+12a^2$ とする。

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積が 9 となるような定数 a の値を求めよ。

(2) x，y が 2 つの不等式 $y \geqq f(x)$，$y \leqq g(x)$ を満たすとする。このとき，$2x-y$ の最大値が 9 となるような定数 a の値を求めよ。また，$2x-y$ の最小値が -9 となるような定数 a の値を求めよ。

解答

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$x^2+2ax=-x^2+4ax+12a^2 \iff (x+2a)(x-3a)=0$$

より $x=-2a,\ 3a$ である． $a>0$ より $-2a<3a$ であり， $-2a \leqq x \leqq 3a$ において $g(x) \geqq f(x)$ であるから，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積は

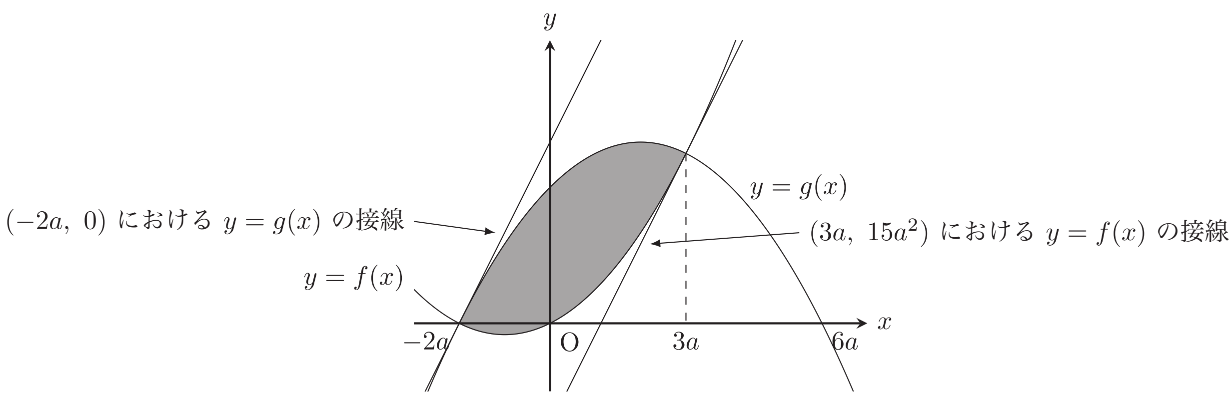
$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{3a}\{g(x)-f(x)\}\,dx &= -2\int_{-2a}^{3a}(x+2a)(x-3a)\,dx\\ &= \frac{2}{6}\{3a-(-2a)\}^3\\ &= \frac{1}{3}(5a)^3\end{aligned}$$

である．これが 9 となればよいので，

$$\frac{1}{3}(5a)^3=9 \iff (5a)^3=3^3 \iff 5a=3$$

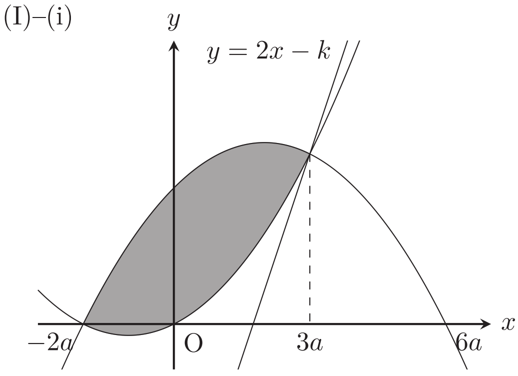
より， $a=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$ である．

(2) $a>0$ であることに注意すると，$y \geqq f(x)$ かつ $y \leqq g(x)$ で表される領域は次の図の境界を含む灰色部分である．これを領域 D とする．

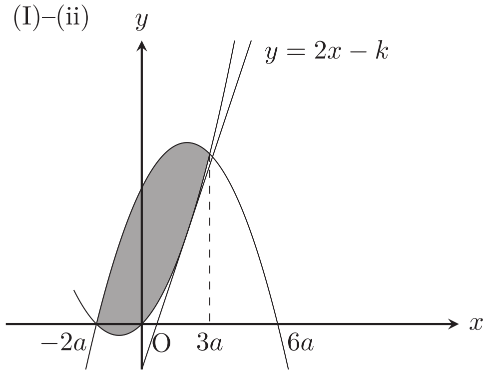


$2x-y=k\cdots$① とおき， ① と領域 D が共有点をもつような最大の k の値が 9，最小の k の値が -9 となるように a の値を定めるとよい．① $\iff$ $y=2x-k$ であるから，これは傾きが 2 で y 切片が $-k$ であるような直線であることに注意しておく．

(I) まず最大値が 9 となるための条件を考える．



これは起こりえない



図より k が最大となる（すなわち y 切片 $-k$ が最小となる）のは，(i) ① が $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の 1 つである $(3a,\ 15a^2)$ を通るときか，(ii) ① が $y=f(x)$ に接するときである．$f'(x)=2x+2a$ であるから，$y=f(x)$ 上の点 $(3a,\ 15a^2)$ における接線の傾きが $f'(3a)=8a$ であることに注意すると，

(i) $8a \leqq 2 \iff a \leqq \dfrac{1}{4}$，すなわち $0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ のときは，① が $(3a,\ 15a^2)$ を通るときが最大である．このとき，① に代入すると $k=6a-15a^2$ である．$k=9$ を代入すると，$5a^2-2a+3=0$ が得られるがこれは実数解をもたない．

(ii) $8a>2 \iff a>\dfrac{1}{4}$ のときは，① が $y=f(x)$ に接するときが最大である．このとき ① と $y=f(x)$ を連立した x についての方程式

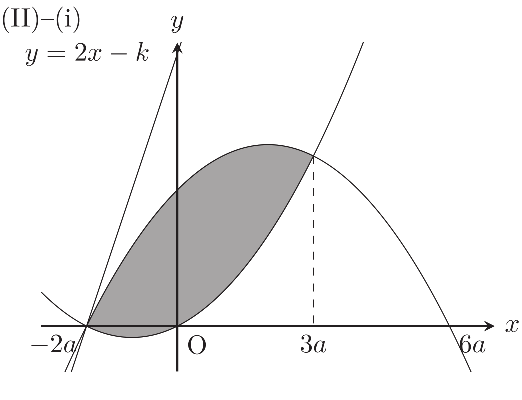
$$2x-k=x^2+2ax \iff x^2+(2a-2)x+k=0$$

は重解をもつので，その判別式を D_1 とすると，

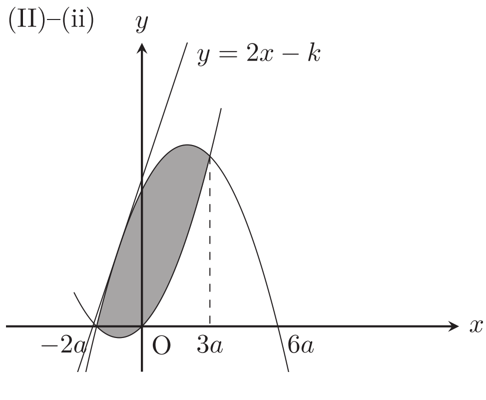
$$\frac{D_1}{4}=(a-1)^2-k=0$$

である．$k=9$ を代入すると $(a-1)^2=9$ より $a=4,\ -2$ を得る．$a>\dfrac{1}{4}$ であるから，$a=4$ である．

(II) 次に，最小値が -9 となるための条件を考える．



この場合は不適である



図より k が最小となる（すなわち y 切片 $-k$ が最大となる）のは，(i) ① が $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の 1 つである $(-2a,\ 0)$ を通るときか，(ii) ① が $y=g(x)$ に接するときである．$g'(x)=-2x+4a$ であるから，$y=g(x)$ 上の点 $(-2a,\ 0)$ における接線の傾きが $g'(-2a)=8a$ であることに注意すると，

(i) $8a \leqq 2 \iff a \leqq \dfrac{1}{4}$，すなわち $0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ のときは，① が $(-2a,\ 0)$ を通るときが最小である．このとき，① に代入すると $k=-4a$ である．$k=-9$ を代入すると，$a=\dfrac{9}{4}$ となるがこれは $0<a \leqq \dfrac{1}{4}$ を満たさない．

(ii) $8a > 2 \iff a > \dfrac{1}{4}$ のときは，① が $y = g(x)$ に接するときが最小である．このとき ① と $y = g(x)$ を連立した x についての方程式

$$2x - k = -x^2 + 4ax + 12a^2 \iff x^2 + (2 - 4a)x - k - 12a^2 = 0$$

は重解をもつので，その判別式を D_2 とすると，

$$\frac{D_2}{4} = (1 - 2a)^2 + k + 12a^2 = 0$$

である． $k = -9$ を代入すると $4a^2 - a - 2 = 0$ より $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ を得る． $a > \dfrac{1}{4}$ であるから，$a = \dfrac{1 + \sqrt{33}}{8}$ である．

以上により，$2x - y$ の最大値が 9 となるような定数 a の値は $a = \mathbf{4}$，$2x - y$ の最小値が -9 となるような定数 a の値は $a = \boldsymbol{\dfrac{1 + \sqrt{33}}{8}}$ である．

講評

$\boxed{1}$ ［平面図形］（標準）

三角形を題材とした平面図形の問題．三角比，ベクトル，チェバ・メネラウスの定理など色々な解法が考えられる．近畿大学の出題としては易しい方であり完答が望まれるが，処理力で差がつきそうである．また，結果の数値があまり単純ではないので自信を持てなかった受験生は多かっただろう．

$\boxed{2}$ ［数列］（難）

感染症の感染拡大モデルを題材とした数列の問題である．漸化式としてフィボナッチ数列に類似する「トリボナッチ数列」を使うのであるが，感染当日には他者に感染させず感染者としても調査にかからないこと，感染 4 日目には感染力はないものの感染者としてカウントしないといけないことなどに細心の注意を払わねばならず，非常に解釈が難しい．問題文の数値に合致する解釈を得るための時間が充分にとれるとは考えにくい．ここでは問題文に合わせて「新規感染者」を「感染 1 日目の感染者」と解釈した．

$\boxed{3}$ ［数学 II の微積分，図形と方程式］（標準）

(1) は $\dfrac{1}{6}$ 公式が使えるため計算も比較的楽に処理できる（ただし x^2 の係数を忘れずに）．(2) はよくある領域における最大値・最小値の問題．結果的にはたまたまいずれも接するときが最大，最小となるのだが，放物線どうしの交点での接線の傾きが不明であるため場合分けは必須である．この大問は頑張ってとりたいところである．

$\boxed{1}$ は完答したい．$\boxed{3}$ は厳密には場合分けが必要だが，接するときを考えれば正しい結果が出てしまうこともあり，減点される程度で済んでいる受験生が多いだろう．$\boxed{2}$ は問題文の解釈が難しく，解釈できたとしてもそれに沿って (1) の結果の数値を出すのは簡単ではない．部分点のない形式なので，全く得点できていない受験生がかなりの割合を占めると思われる．

$\boxed{2}$ に深入りせず，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ でどれだけ正確に処理できたかの勝負となりそう．目標は 50%．

解説動画公開中

https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q