

解 答 速 報

関西医科大学（後期） 数学

2022年3月5日実施

I i を虚数単位とするとき、以下の設問に答えよ。なお各設問の答えは解答用紙の指定欄に記入し、左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること。

(1) k が奇数のとき $\left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right\}^{3k} + \left\{ \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right\}^{3k}$ の値を求めよ。

(2) $\left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right\}^{2022} + \left\{ \frac{\sqrt{3}-i}{2} \right\}^{2022}$ の値を求めよ。

解答

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ とする.}$$

(1) $\alpha = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ より

$$\begin{aligned} \alpha^{3k} &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{3k} \\ &= \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

$\beta = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$ より

$$\begin{aligned} \beta^{3k} &= \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}^{3k} \\ &= \cos \left(-\frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{k\pi}{2} \right) \\ &= \cos \frac{k\pi}{2} - i \sin \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\alpha^{3k} + \beta^{3k} = 2 \cos \frac{k\pi}{2} \dots \textcircled{1}$$

k が奇数であることに注意すると、求める値は

$$\alpha^{3k} + \beta^{3k} = 0$$

(2) $2022 = 3 \times 674$ なので $\textcircled{1}$ に $k = 674$ を代入することにより、求める値は

$$\alpha^{2022} + \beta^{2022} = 2 \cos 337\pi = 2(-1) = -2$$

〈〈 模試・講座のご案内 〉〉

医学部進学予備校 **メビオ** では **春期講習** を実施します

医学部受験相談会も好評実施中 ※いずれも詳細は最終面をご確認ください

II 自然数の2乗で表される数を平方数という。 $n^2 - 30n + 210$ の値が平方数となるような、素数 n をすべて求めよ。

解答

$n^2 - 30n + 210 = (n - 15)^2 - 15$ が平方数になるとすると、自然数 m を用いて

$$(n - 15)^2 - 15 = m^2$$

$$\iff (n - 15)^2 - m^2 = 15$$

$$\iff (n - 15 - m)(n - 15 + m) = 15 = 3 \cdot 5$$

となる。 $m > 0$ より $n - 15 - m < n - 15 + m$ であることを考慮すると次の表を得る。

$n - 15 - m$	1	3	-15	-5
$n - 15 + m$	15	5	-1	-3
$2n - 30$	16	8	-16	-8
n	23	19	7	11
m	7	1	7	1

7, 11, 19, 23 はすべて素数であるから、求める素数 n は $n = 7, 11, 19, 23$ である。



関西医科大学後期対策 3/3 の授業 (入試日の2日前)

問題 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ が整数解 x を持つような整数 m の値をすべて求めよ。

解答

$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 4}}{2}$ である。 $m^2 - 8m - 4$ が平方数 (今回は0を含む) となる必要があるので、非負整数 k を用いて

$$m^2 - 8m - 4 = k^2$$

$$\iff (m - 4)^2 - 20 = k^2$$

$$\iff (m - 4)^2 - k^2 = 20$$

$$\iff (m - 4 + k)(m - 4 - k) = 20$$

となる。 $k \geq 0$ より $m - 4 + k \geq m - 4 - k$ であることと、 $m - 4 + k$ と $m - 4 - k$ の偶奇が一致することを考慮すると次の表を得る。

$m - 4 + k$	10	-2
$m - 4 - k$	2	-10
$2k$	8	8
k	4	4
m	10	-2

$m = 10$ のとき $x = 3, 7$, $m = -2$ のとき $x = -3, 1$ なので適する。

Ⅲ xy 平面上に、円 $C: x^2 + (y+1)^2 = 1$ がある。 x 軸上の異なる 2 点 A, B と、円 C の外部に存在する点 P をとる。ただし、 A の x 座標は B の x 座標よりも大きいものとし、点 P は x 軸上にないものとする。 A の座標を $(t, 0)$ 、 P の座標を (X, Y) とするとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 直線 AP の方程式を求めよ。
- (2) 直線 AP と直線 BP がどちらも円 C の接線であるとき、 t を X と Y を用いて表せ。
- (3) (2) の条件に加えて、 P が $AB = 2$ を満たしながら動くとき、その軌跡を図示せよ。

解答

(1) 傾きは $X \neq t$ のとき $\frac{Y}{X-t}$ であるので直線 AP の方程式は $y = \frac{Y}{X-t}(x-t)$. つまり

$$Yx - (X-t)y - Yt = 0 \quad (X=t \text{ のときも成り立つ})$$

(2) 直線 AP と円の中心 $(0, -1)$ との距離が半径 1 と等しければよいので、

$$\frac{|(X-t) - Yt|}{\sqrt{Y^2 + (X-t)^2}} = 1 \iff |(X-t) - Yt| = \sqrt{Y^2 + (X-t)^2}$$

この両辺を 2 乗することにより、

$$\begin{aligned} (X-t)^2 - 2Yt(X-t) + Y^2t^2 &= Y^2 + (X-t)^2 \\ \iff (Y^2 + 2Y)t^2 - 2XYt - Y^2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 P は x 軸上にないので $Y \neq 0$. したがって

$$(Y+2)t^2 - 2Xt - Y = 0 \dots \textcircled{1}$$

を得る。また、接線が 2 本存在する必要があるので、 $Y \neq -2$ であることがわかる。このとき $\textcircled{1}$ に解の公式を用いて、

$$t = \frac{X \pm \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \dots \textcircled{2}$$

点 P が円 C の外部にあることから

$$X^2 + (Y+1)^2 > 1 \iff X^2 + Y^2 + 2Y > 0$$

したがって $\textcircled{2}$ は異なる 2 つの実数とわかり、大きい方が t であるので、

$$\begin{cases} Y > -2 \text{ のとき } t = \frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \\ Y < -2 \text{ のとき } t = \frac{X - \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \end{cases}$$

(3) $B(s, 0)$ とすると 題意より $t-s=2$ が成り立つ。また、(2) と同様に

$$s = \frac{X \pm \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \dots \textcircled{3}$$

を得る。 $\textcircled{3}$ を満たす s のうち、小さい方が s であるので、

$$\begin{aligned} t-s &= \left| \frac{X + \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} - \frac{X - \sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y}}{Y+2} \right| = 2 \end{aligned}$$

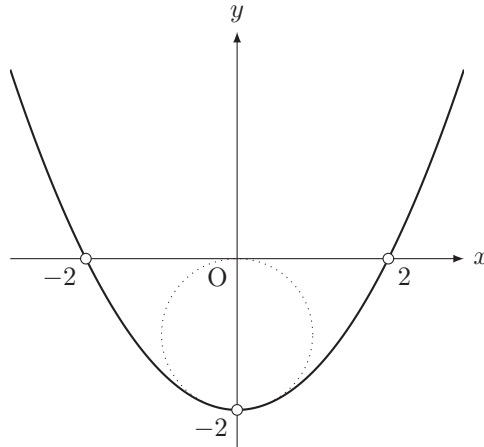
つまり

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + 2Y} = |Y + 2|$$

を得る. この両辺を 2 乗することにより,

$$X^2 + Y^2 + 2Y = Y^2 + 4Y + 4 \iff Y = \frac{1}{2}X^2 - 2$$

よって点 P の軌跡は下図のようになる. ただし, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ は除く.



IV xy 平面上に、点 $A(1, 0)$ をとる。原点を中心とする半径 1 の円に内接する正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。頂点 A, B, C の 3 点を通る放物線を P_1 、頂点 A, B, D の 3 点を通る放物線を P_2 とする。この問題でいう放物線とは、その軸が y 軸に平行なものとすると、以下の設問に答えよ。なお、各設問の答えは解答用紙の指定欄に記入し、左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること。

- (1) P_1 の方程式を求めよ。
- (2) P_1 上に、正八角形の A, B, C 以外の頂点は存在するか。存在するならば、その頂点を求めよ。
- (3) P_2 の方程式を求めよ。
- (4) P_2 上に、正八角形の A, B, D 以外の頂点は存在するか。存在するならば、その頂点を求めよ。
- (5) この正八角形の頂点から異なる 4 点を無作為に選んだときに、この 4 点が 1 つの放物線上にある確率を求めよ。

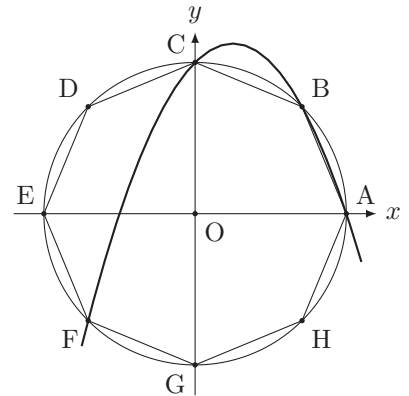
解答

8 点の座標はそれぞれ $A(1, 0), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C(0, 1), D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), E(-1, 0), F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), G(0, -1), H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

- (1) P_1 の方程式を $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ とおく。このグラフが 3 点 A, B, C を通ることから

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}b_1 + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

が得られる。これを解いて $(a_1, b_1, c_1) = (-2, 1, 1)$ となるので、 P_1 の方程式は $y = -2x^2 + x + 1$ である。

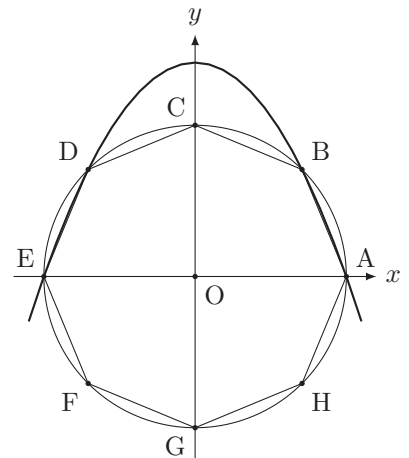


- (2) 点 G, H の x 座標はそれぞれ点 C, B の x 座標と一致するので明らかにこの 2 点は P_1 上にない。また、 P_1 のグラフは上に凸であり、 $P_1: y = -(x-1)(2x+1)$ より P_1 のグラフの x 切片が $1, -\frac{1}{2}$ であることから、2 点 D, E も P_1 上にないことは明らかである。また、点 F は P_1 上の点であることがわかるので、 P_1 上に正八角形の A, B, C 以外の頂点は存在し、その頂点は F である。

- (3) P_2 のグラフは y 座標の等しい異なる 2 点 B, D を通るので y 軸対称である。したがってその方程式は $y = a_2x^2 + c_2$ とおける。 A, B を通ることから、

$$\begin{cases} a_2 + c_2 = 0 \\ \frac{1}{2}a_2 + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

が得られる。これを解いて $(a_2, c_2) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ となるので、 P_2 の方程式は $y = -\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}$ である。

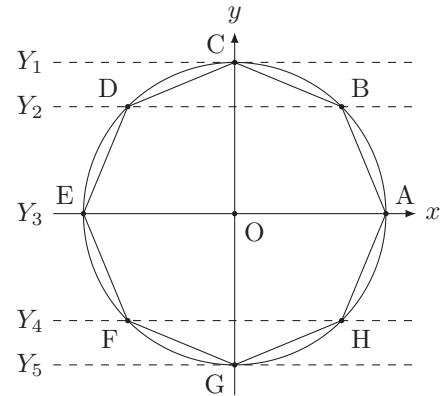


- (4) P_2 のグラフは y 軸対称であり、点 A を通ることから点 E を通ることは明らかである。またグラフが上に凸であることと、 y 切片が $\sqrt{2}$ であることから、 C, G は通らず、 F, H の x 座標がそれぞれ D, B と一致するので F と H も通らない。したがって、 P_2 上に正八角形の A, B, D 以外の頂点は存在し、その頂点は E である。
- (5) まず異なる 4 点を通る放物線があるとき、その 4 点の x 座標はすべて異なっていなければならないことに注意しておく。

(i) 選んだ 4 点のうち 2 点の y 座標が等しい場合、この放物線は y 軸対称となるので、4 点すべてが y 軸対称でなければならない。 x 座標が等しい C, G を同時に通る放物線は存在しないので、この性質を満たす 4 点は C, G を含まない y 軸対称な 4 点である。したがって 4 点の取り方で x 座標がすべて異なる取り方は $\{A, B, D, E\}$ あるいは $\{A, E, F, H\}$ の 2 通りしかない (これは (3) のタイプの放物線である)。

(ii) 選んだ 4 点の y 座標がすべて異なる場合、この 8 点を次のように y 座標が等しいものでグループ分けしておく。

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{C\} \\ Y_2 &= \{B, D\} \\ Y_3 &= \{A, E\} \\ Y_4 &= \{F, H\} \\ Y_5 &= \{G\} \end{aligned}$$



この 5 つのうちの異なる 4 つの集合から 1 点ずつを取るとき、 Y_1 と Y_5 の両者を同時に選ぶことはできないので、 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 から 1 点ずつ取るか、 Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 から 1 点ずつ取るしかない。ここで、 x 座標がすべて異なり 4 点が 1 つの放物線上にある取り方は $\{A, B, C, F\}$, $\{E, D, C, H\}$, $\{E, F, G, B\}$, $\{A, H, G, D\}$ の 4 通りである (これは (1) のタイプの放物線である)。

以上により題意を満たす 4 点の取り方は 6 通りであるから、求める確率は $\frac{6}{8C_4} = \frac{3}{35}$ である。

V 座標平面上に、関数 $f(x) = \frac{2x^3 - 12x}{x^2 - 9}$ を用いて表される曲線 $C: y = f(x)$ がある。以下の設問に答えよ。

- (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ を満たす定数 a, b を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、曲線 C のグラフの概形を描け。
- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答

(1) $f(x) = 2x + \frac{6x}{x^2 - 9}$ と式変形できるので、

$$f(x) - (ax + b) = (2 - a)x - b + \frac{\frac{6}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}}$$

である。 $x \rightarrow \infty$ のときにこれが 0 に収束する条件は、 $a = 2, b = 0$ である。

(2) $f(-x) = -f(x)$ が成り立つので、 $y = f(x)$ は原点に関して対称である。よって、 $x \geq 0$ におけるグラフを考え、原点に関して対称なものを書けばよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{6(x^2 - 9) - 6x \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2(x^2 - 9)^2 - 6x^2 - 54}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 42x^2 + 108}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2(x^2 - 3)(x^2 - 18)}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned}$$

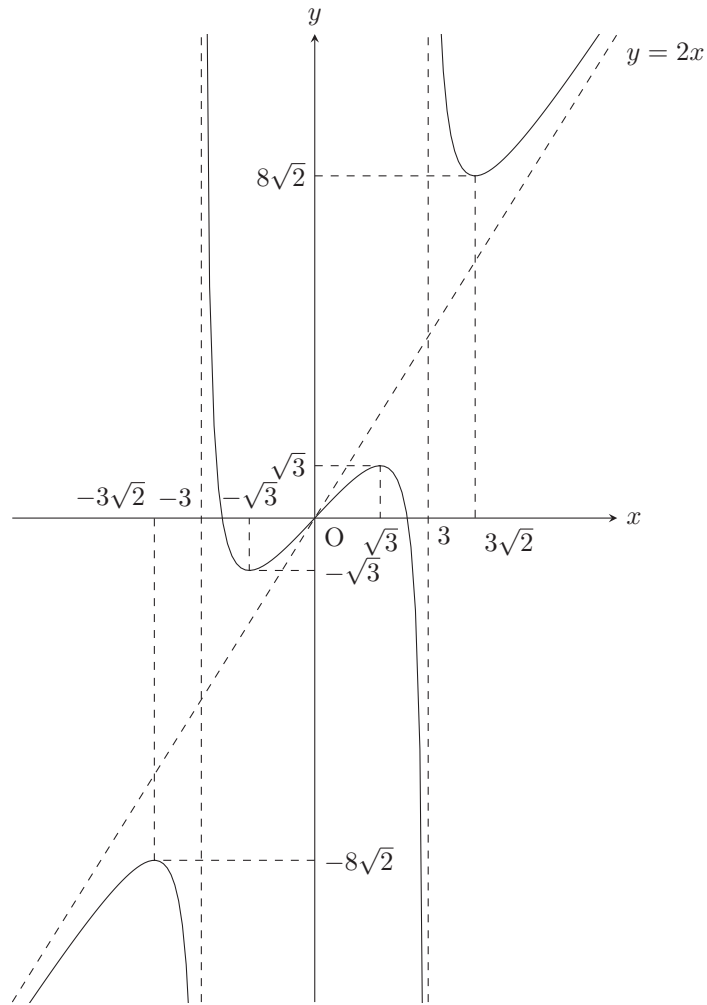
より、 $f(x)$ の $x \geq 0$ における増減は次の通りである。

x	0	...	$\sqrt{3}$...	3	...	$3\sqrt{2}$...
$f'(x)$	+	+	0	-	×	-	0	+
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{3}$	↘	×	↘	$8\sqrt{2}$	↗

また、(1) より $y = f(x)$ は $x \rightarrow \infty$ のとき $y = 2x$ に漸近する。さらに、

$$\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} f(x) = \pm \infty \quad (\text{複号同順})$$

より、グラフは次の通りである。



(3) $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pm\sqrt{6}$ である。前問で述べた対称性を利用すると求める面積は、

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\sqrt{6}} f(x) dx &= 2 \int_0^{\sqrt{6}} \left(2x + \frac{6x}{x^2 - 9} \right) dx \\
 &= 2 [x^2 + 3 \log |x^2 - 9|]_0^{\sqrt{6}} \\
 &= 2(6 + 3 \log 3 - 3 \log 9) \\
 &= \mathbf{12 - 6 \log 3}
 \end{aligned}$$

講評

I [複素数平面] (やや易)

ド・モアブルの定理を利用する典型問題。ここは完答したい。

II [整数] (標準)

2次式で表された整数が平方数となる条件を考える典型問題。こども落とせない。

III [図形と方程式] (やや難)

2点を通る直線が円と接する条件は点と直線の距離の公式を用いる。(2)を答えるには解の公式が必要になる。それを使って(3)で得られた関係式を整理していくことになる。ある程度力ずくの計算が必要となるので、そこは頑張らないといけない。

IV [2次関数, 確率] (標準)

指定された点を通る放物線を決定する問題である。得られた放物線が他の点を通るかどうかは図形的に候補が絞られるので、それも利用すること。(5)の確率の答は問題の流れから見当はつくが、答案が作成しにくい。 P_1, P_2 およびそれと対称なもの以外にないことをどう説明するかである。ここでは異なる y 座標の個数に注目することにした。解答用紙のスペースを考えると厳密な議論をしていなくても正解となっている可能性はある。

V [数学Ⅲの微積分] (標準)

分数関数について、漸近線や増減を調べてグラフを描画し、面積を求める問題。非常にオーソドックスな内容で、ここは完答がほしい。

2022年前期と同様に、昨年度までであった小問集合は姿を消し、大問が5問であった。後期は前期と比べて問題の難易度が高いことも多いのだが、今回は2022年前期に比べると取り組みやすい問題が多い。また2021年後期と比べても易化している。目標は80%。

解説動画を今夜公開!

<https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q>

本解答速報の内容に関するお問合せは

医学部進学予備校 **メビオ**

☎ 0120-146-156 受付 9:00~21:00(土日祝可)
大阪市中央区石町 2-3-12 ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校 **YMS** ☎ 03-3370-0410
<https://yms.ne.jp/>

医学部専門予備校 **英進館メビオ** 福岡校 ☎ 0120-192-215
<https://www.mebio-eishinkan.com/>



友だち追加で全科目を閲覧!
LINE 公式アカウント

◀ メビオの友だち登録はこちらから

苦手も得意も今から伸ばす!

春期講習

早めに学習の基礎を固めて、今後の成績を底上げしておきましょう!

2泊3日無料体験

寮の宿泊・食堂利用・メビオの2泊3日無料体験をご用意しました!

第1期 3/20 (日・祝) 開講
第2期 3/27 (日) 開講

オンラインクラスも同時開講!

医学部受験相談会

/2022/

〈好評開催中〉

大阪/京都/和歌山/名古屋/広島

医学部を目指すみなさまへ

長年にわたって医学部受験を指導している現役講師が壇上に立ち、医学部入試についての詳細な分析をお伝えします。入試にまつわる悩みや学習のご相談にもお答えします。

各会場では無料体験授業も実施(参加自由)

春期講習のお申し込み、説明会日程の確認、ご予約はお電話、HP、QRコードから承ります

