関西医科大学（前期）　数学

2022年1月29日実施

I　ボタンを 1 回押すたびに 3 桁の数字が表示される装置がある。各桁には，ある出現確率で 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかの数字が現れ，3 つの数字がすべて一致したときに「あたり」となる。この装置には状態 A と状態 B の 2 つの状態があり，そのときの状態に従って数字の出現確率がすべての桁で同時に変化する。この状態はボタンを押すたびに決定され，状態 A は $\frac{1}{4}$，状態 B は $\frac{3}{4}$ の確率で選ばれる。また，状態 A のときの数字の出現確率は，1 の出現確率のみ $\frac{3}{5}$ で，残りの 2 〜 5 はそれぞれ $\frac{1}{10}$ であり，状態 B のときの数字の出現確率は，1, 2, 3 は $\frac{1}{5}$，5 は $\frac{2}{5}$ で，4 は出現しない。

この装置について，以下の確率を求めよ。なお，各設問の答えは解答用紙の指定欄に既約分数で記入すること。

(1)　装置の状態が状態 A のとき，ボタンを押して「あたり」が出る確率

(2)　装置の状態が状態 B のとき，ボタンを押して「あたり」が出る確率

(3)　ボタンを押して「あたり」が出る確率

(4)　ボタンを押して「あたり」が出たときに，装置の状態が状態 A である条件付き確率

解答

(1) $\boldsymbol{\frac{11}{50}}$　(2) $\boldsymbol{\frac{11}{125}}$　(3) $\boldsymbol{\frac{121}{1000}}$　(4) $\boldsymbol{\frac{5}{11}}$

解説

状態 A, B における各数字の出現確率を表にすると以下の通りとなる.

数字	1	2	3	4	5	計
状態 A	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
状態 B	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1

(1)　状態 A のとき，3 桁の数字が 111 となる確率は $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ であり，222，333，444，555 となる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{10}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{11}{50}}$$

(2)　状態 B のとき，3 桁の数字が 111，222，333 となる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{5}\right)^3$，444 となる確率は 0，555 とな

る確率は $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 + 0 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \mathbf{\frac{11}{125}}$$

(3)　(1)(2) の結果を考慮すると，求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{11}{50} + \frac{3}{4} \times \frac{11}{125} = \mathbf{\frac{121}{1000}}$$

(4)　装置の状態が状態 A であるという事象を X，また，ボタンを押して「あたり」が出るという事象を Y とすると，求める条件付き確率は

$$P_Y(X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\dfrac{1}{4} \times \dfrac{11}{50}}{\dfrac{121}{1000}} = \mathbf{\frac{5}{11}}$$

II　関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{6x^2+17x+10}{3x-2}$ と定めるとき，以下の設問に答えよ。なお各設問の答えは解答用紙の指定欄に記入し，左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること。

(1)　$f(x)>0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{3x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 A, B, C の値を定めよ。

(3)　$f(n)$ の値が正の整数となるような整数 n をすべて求めよ。

解答

(1)　$f(x)>0$ の両辺に $(3x-2)^2>0$ をかけると，

$$(6x+5)(x+2)(3x-2)>0$$

となるので，$\boldsymbol{-2<x<-\dfrac{5}{6}}$**,** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}<x}$ **.**

(2)　分子を分母で割り算することにより，$f(x)=\dfrac{(3x-2)(2x+7)+24}{3x-2}=2x+7+\dfrac{24}{3x-2}$ であるから，

$\boldsymbol{A=2}$**,** $\boldsymbol{B=7}$**,** $\boldsymbol{C=24}$ **.**

(3)　(1) より $f(n)>0$ となる整数 n は，-1 もしくは 自然数である．$f(-1)$ は整数とならないので $n=-1$ は不適である．n が自然数のとき $f(n)=2n+7+\dfrac{24}{3n-2}$ が正の整数となるためには，$3n-2$ が 24 の正の約数（3 で割って 1 余るもの）であればよい．このとき $3n-2=1$, 4 のみとわかる．したがって，$\boldsymbol{n=1}$**,** $\boldsymbol{2}$ である．

III 関数 $f(x)=\pi x\cos(\pi x)-\sin(\pi x)$，$g(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ を考える。ただし，x の範囲は $0<x\leqq 2$ とする。以下の設問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け。

(2) $f(x)=0$ の解がただ 1 つ存在し，それが $\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{3}{2}$ の範囲にあることを示せ。

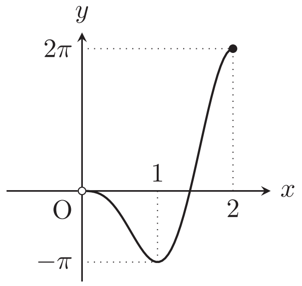
(3) n を整数とする。各 n について，直線 $y=n$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点の個数を求めよ。

解答

(1) $f'(x)=-\pi^2 x\sin(\pi x)$ より $f'(x)=0 \iff x=(0,)\ 1,\ 2$ であるから，増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	(0)	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π

したがって，グラフの概形は次の通り．



(2) (1) のグラフから $f(x)=0$ の解がただ 1 つ存在することは明らかである．さらに

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0 \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=1>0 \end{cases}$$

であるから，ただ 1 つの解は $\dfrac{4}{3}<x<\dfrac{3}{2}$ の範囲にある． （証明終）

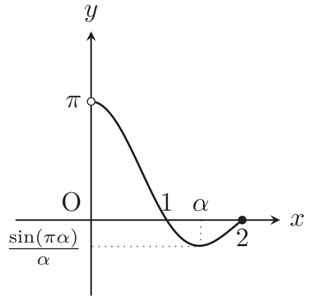
(3) $g'(x)=\dfrac{\pi x\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x^2}$ となる．この分母は正であるから， $g'(x)$ の符号は $f(x)$ の符号と一致する．ここで，$f(x)=0$ のただ 1 つの解を α とする．

$$\lim_{x\to+0} g(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\cdot\pi=\pi$$

であることに注意すると，$g(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	(π)	$\searrow$	$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}$	$\nearrow$	0

したがって，$y=g(x)$ のグラフの概形は次の通り．



ここで，$-1<\sin(\pi\alpha)<0$ および $\alpha>1$ より $-1<\dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha}<0$ がわかるので，n を整数として直線 $y=n$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{n \geqq 4} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{n = 1, 2, 3} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{n = 0} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{n \leqq -1} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

となる．

Ⅳ　xy 平面上に，2 点 P $(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$，Q $(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$ をとる。線分 PQ の中点の x 座標を t とし，線分 PQ の長さを L とおく。θ が $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，以下の設問に答えよ。なお各設問の答えは解答用紙の指定欄に記入し，左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること。

(1)　直線 PQ の方程式を t を用いて表せ。

(2)　L の値の範囲を求めよ。

(3)　L が最大値をとるときの θ の値を求めよ。

(4)　線分 PQ が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

解答

(1)　$t = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{2}$ より $\cos\theta + \sin\theta = 2t$ である．また，$t^2 = \dfrac{1 + 2\sin\theta\cos\theta}{4}$ より，$\sin\theta\cos\theta = 2t^2 - \dfrac{1}{2}$ である．よって直線 PQ の方程式は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}(x - \cos\theta) + \cos^2\theta \\ &= (\sin\theta + \cos\theta)x - \sin\theta\cos\theta \\ &\boldsymbol{= 2tx - 2t^2 + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である．

(2)　まず，$t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ と $\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ より，$-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ となるので，$0 \leqq t^2 \leqq \dfrac{1}{4}$ である．

$$\begin{aligned}L^2 &= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} \\ &= (1 - 2\sin\theta\cos\theta)\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} \\ &= (-4t^2 + 2)(1 + 4t^2) \\ &= -16t^4 + 4t^2 + 2 \\ &= -16\left(t^2 - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

となるので，$2 \leqq L^2 \leqq \dfrac{9}{4}$ すなわち，$\boldsymbol{\sqrt{2} \leqq L \leqq \dfrac{3}{2}}$ である．

(3)　前問の議論より L が最大値をとるのは，$t^2 = \dfrac{1}{8}$ すなわち $t = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ のときである．このとき，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \iff\ &\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{2} \\ \iff\ &\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi \\ \iff\ &\theta = \boldsymbol{\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi}\end{aligned}$$

(4)　点 P，Q はともに $y=x^2$ 上にあるので，線分 PQ は，

$$y=2tx-2t^2+\frac{1}{2} \text{ の } y \geqq x^2 \text{ の部分}$$

である．よって，$y \geqq x^2$ を満たし，さらに t の方程式

$$2t^2-2xt+y-\frac{1}{2}=0$$

が $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ で解をもつ条件を求めればよい．

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2-2xt+y-\frac{1}{2} \\ &= 2\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}+y-\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

とおき，$f(t)=0$ の判別式を D とする．$f(t)=0$ が $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ で少なくとも 1 つ解をもつ条件は，

(i)　$\frac{x}{2}<-\frac{1}{2} \iff x<-1$ のとき

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \leqq 0$ かつ $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \iff x \leqq y \leqq -x$ であるが，$-x<x^2$ なので $y \geqq x^2$ との共通部分はない．

(ii)　$-\frac{1}{2} \leqq \frac{x}{2}<0 \iff -1 \leqq x<0$ のとき

$D \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \iff x \leqq y \leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ であるが，$x<x^2$ なので，$y \geqq x^2$ との共通部分は $x^2 \leqq y \leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$

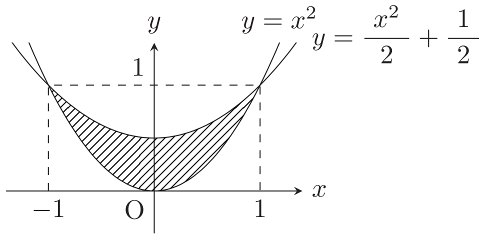
(iii)　$0 \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{1}{2} \iff 0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$D \geqq 0$ かつ $f\left(-\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \iff -x \leqq y \leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ であるが，$-x \leqq x^2$ なので，$y \geqq x^2$ との共通部分は $x^2 \leqq y \leqq \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$

(iv)　$\frac{1}{2}<\frac{x}{2} \iff x>1$ のとき

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \geqq 0$ かつ $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 0 \iff -x \leqq y \leqq x$ であるが，$x<x^2$ なので $y \geqq x^2$ との共通部分はない．

以上より，求める領域は以下の斜線部分である（境界を含む）．



別解 1

$f(t)=0$ が $-\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ で解をもつための条件で上記の解法では 4 つ場合分けをしているが，線分 PQ 上の点の x 座標が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあることから，実は上記の場合分けの (i)，(iv) は不要である．また，(ii)，(iii) も

$$D \geqq 0 \text{ かつ「} f\left(-\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \text{ または } f\left(\frac{1}{2}\right) \geqq 0 \text{」}$$

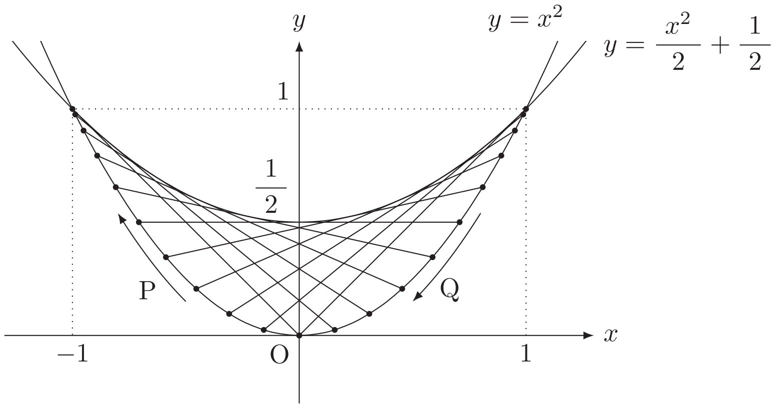
という条件でまとめることができる.

$\boxed{\text{別解 2}}$

①において，$f(t)=0$ を変形すると，

$$2\left(t-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{2}+y-\frac{1}{2}=0 \iff y-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=-2\left(t-\frac{x}{2}\right)^2$$

であるから，直線 PQ は $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ と $x=2t$ で常に接していることがわかる．$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ より，$-1\leqq 2t\leqq 1$ であるから，接点はこの範囲にある．また，P，Q の x 座標について $-1\leqq\cos\theta\leqq 0$，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$ であるから，点 P は $y=x^2$ 上の $-1\leqq x\leqq 0$ の部分を，点 Q は $y=x^2$ 上の $0\leqq x\leqq 1$ の部分を動くので，線分 PQ が通過する領域は下図のようになる．



V　座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$，$0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする。以下の設問に答えよ。

(1)　C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ。

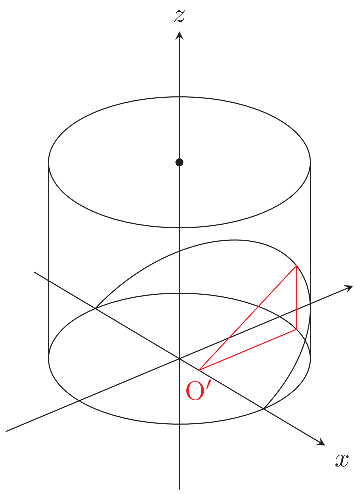
(2)　C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ。

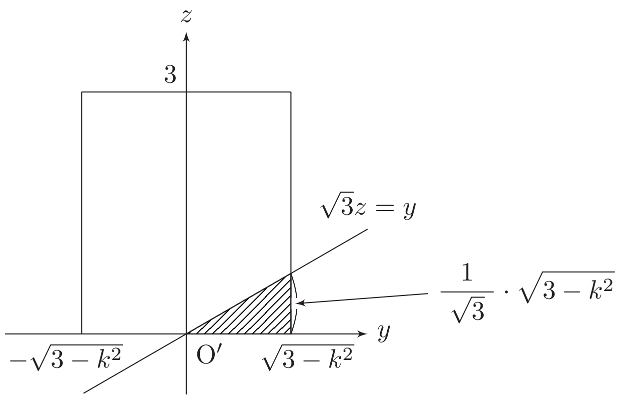
(3)　C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ。

解答

以下，解答に現れる直線の傾きは $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ または $\pm\sqrt{3}$ であるので，図に現れる直角三角形の 3 辺の長さの比は $1:2:\sqrt{3}$ であることに注意する．

(1)





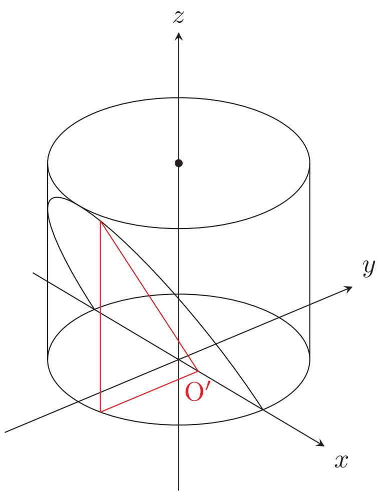
$x^2+y^2 \leqq 3$ に $x=k$ を代入すると $-\sqrt{3-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{3-k^2}$ となるので，D_1 を 平面 $x=k$ $\left(-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}\right)$ で切った断面は $-\sqrt{3-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{3-k^2}$，$0 \leqq z \leqq 3$，$\sqrt{3}z \leqq y$ で表される領域となる．その面積を $S_1(k)$ とおくと図より

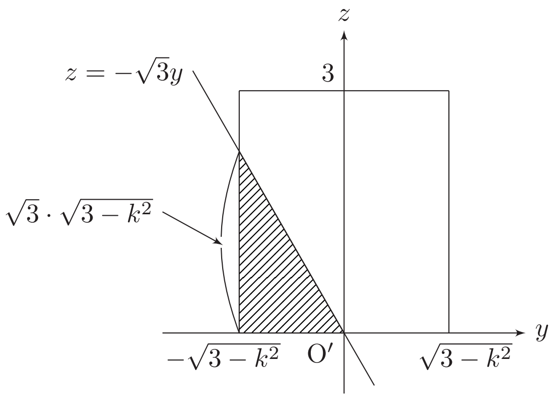
$$\begin{aligned} S_1(k) &= \sqrt{3-k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3-k^2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3-k^2\right) \end{aligned}$$

である．したがって求める体積を V_1 とすると，

$$V_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S_1(k)dk = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-k^2\right)dk = \mathbf{2}$$

(2)





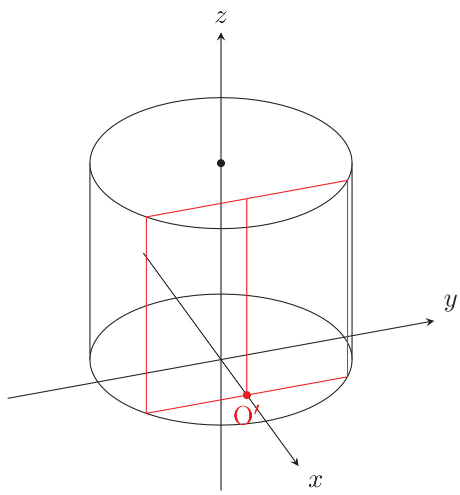
D_2 を 平面 $x=k$ $\left(-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}\right)$ で切った断面は $-\sqrt{3-k^2}\leqq y\leqq\sqrt{3-k^2}$, $0\leqq z\leqq 3$, $z\leqq-\sqrt{3}y$ で表される領域となる．その面積を $S_2(k)$ とおくと図より

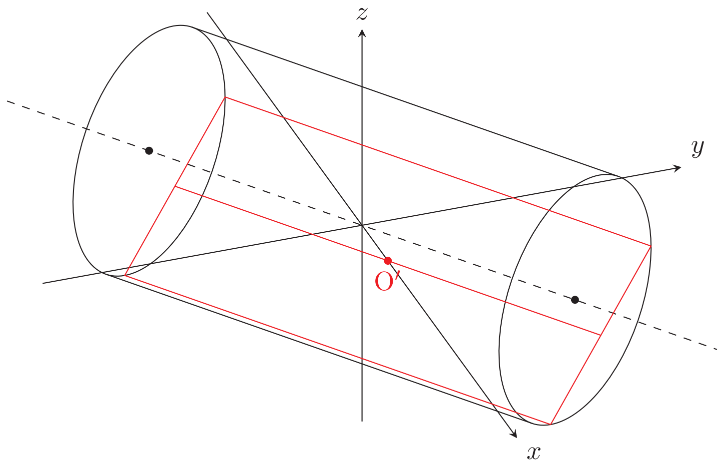
$$\begin{aligned} S_2(k) &= \sqrt{3-k^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-k^2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(3-k^2\right) \end{aligned}$$

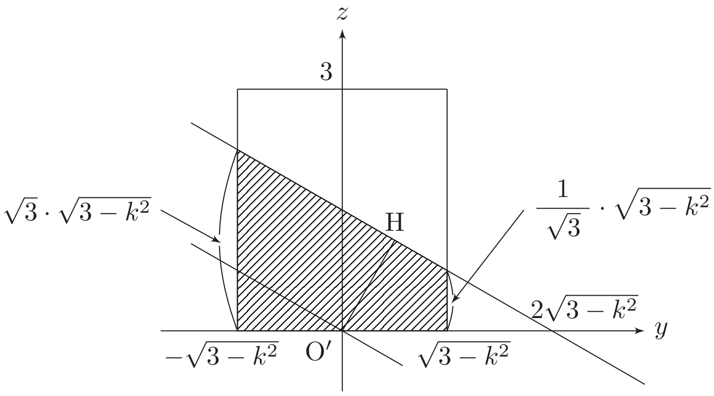
である．したがって求める体積を V_2 とすると，

$$V_2=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}S_2(k)dk=\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-k^2\right)dk=\mathbf{6}$$

(3)







yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分は，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ を軸とする半径 $\sqrt{3}$ の円柱である（これを C' とする）．したがって C' を平面 $x=k$ で切った断面は $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離（図の垂線 O′H の長さ）が $\sqrt{3-k^2}$ の 2 直線に挟まれた部分となる．D は C と C' との共通部分であるから， D を平面 $x=k$ $\left(-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}\right)$ で切った断面は図の斜線部のような台形となる．この台形の面積を $S_3(k)$ とおくと，

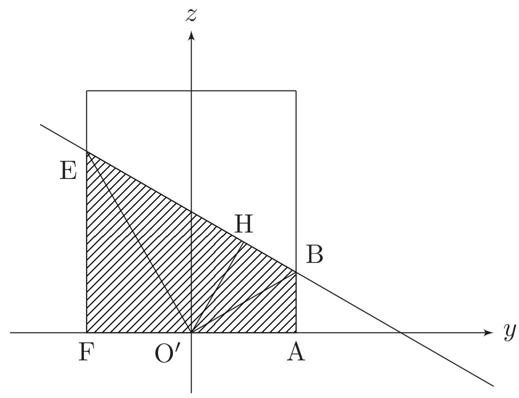
$$\begin{aligned}S_3(k)&=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-k^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3-k^2}\right)\times 2\sqrt{3-k^2}\\&=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(3-k^2\right)\end{aligned}$$

となる．したがって求める体積を V_3 とすると，

$$V_3=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}S_3(k)dk=\frac{8}{3}\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-k^2\right)dk=\mathbf{16}$$

$\boxed{\text{別解}}$

(3) で図のように O$'$, A, B, E, F を定める．ここで $\triangle\mathrm{O'AB} \equiv \triangle\mathrm{O'HB}$, $\triangle\mathrm{O'FE} \equiv \triangle\mathrm{O'HE}$ である．$\triangle\mathrm{O'AB}$ を $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ について積分したものが V_1 であり，$\triangle\mathrm{O'FE}$ を $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ について積分したものが V_2 であるので，$V_3 = 2\,(V_1 + V_2) = \mathbf{16}$ である．



講評

Ⅰ［確率］（やや易）

3 桁の各位の数字が一致すれば「あたり」となる確率の問題．やや目新しかったかもしれない．問題文が少し長く条件が複雑に見えるかもしれないが，並べ替えを考慮する必要がない分計算は楽である．落ち着いて読み解けば各設問の誘導も親切であるため十分完答が狙える問題であった．ここは落とせない．

Ⅱ［数と式，整数］（やや易）

分数関数の問題．(1) は分母で場合分けしてもよいが，解答のように分母分子に $(3x-2)^2$ をかけて解いた方が手っ取り早い．(2) の恒等式もただの計算であるため落とせない．(3) に関しても (2) で式変形をした後であるためかなり考えやすい．こちらも Ⅰ と同様に完答を狙いたい問題であった．

Ⅲ［数学Ⅲの微分］（標準）

(1) は三角関数で表された関数 $y=f(x)$ のグラフを増減を調べて描く問題．(2) は (1) を用いた $f(x)=0$ の解の評価の問題．(3) では $g'(x)$ の符号と $f(x)$ の符号が一致することを用いてその値域について考察する．設定は単純だが，正確な計算が必要とされる問題だろう．

Ⅳ［線分の通過領域］（やや難）

$y=x^2$ 上に三角関数で表された 2 点 P, Q をとり，線分 PQ の通過領域を求めさせる問題．三角関数の基本的な変形が出来れば誘導に従って (1), (2), (3) は解けるが，計算力はある程度必要である．最終的な通過領域は答案が作成しにくい．定石通り $x,\ y$ を定数とみてパラメータ t が範囲内に解をもつ条件を求めると直線の通過領域は求められるのだが，求めたいのは線分の通過領域なので，図形的に考えて面倒な議論を避けるのが現実的であろう．

Ⅴ［空間図形，数学Ⅲの積分］（やや難）

座標空間内で，直円柱を平面で分割したときの立体の体積を求める問題．(1)(2) は典型的であるため是非正解したいところである．(3) では，x 軸に垂直な断面（台形となる）の面積を考えて積分すればよいが，図を正確に把握するのが難しかったかもしれない．実は (1) と (2) の結果がそのまま利用でき，それに気づけると大幅に時間が短縮できる．

（総評は次ページへ）

例年だと計 4 問で Ⅰ が小問集合であったが，今回は小問集合がなくなり大問 5 問となった．ただし Ⅰ と Ⅱ を合わせて小問集合程度の分量ではあった．これでここ 5 年間は出題形式に何らかの変化が起こり続けていることになる．

今回のセットはほぼ易しい順に問題が並んでいる．Ⅰ～Ⅲ を完答に近いところまで仕上げ，Ⅳ，Ⅴ で半分以上は得点したいところ．例年よりは得点しやすい．目標は 75%．

解説動画公開中！

https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q