医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

福岡大学 医学部（推薦）　数学

2021年 11月28日実施

[I] 次の $\boxed{}$ をうめよ。答は解答用紙の該当欄に記入せよ。

(i) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ により定める。このとき，$\log_2 a_1{a_2}^2{a_3}^3\cdots{a_{10}}^{10}$ の値は $\boxed{(\ 1\ )}$ である。

(ii) a を正の定数とする。すべての実数 x について不等式 $a^x \geqq -x$ が成り立つときの定数 a の値の範囲は $\boxed{(\ 2\ )}$ である。

(iii) 不等式 $\dfrac{1}{2}x^2 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$ の表す領域を D とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x-y$ の最大値は $\boxed{(\ 3\ )}$ である。

(iv) $a,\ b,\ c$ を正の実数とするとき，$\dfrac{(a+2b)(b+2c)(4c+a)}{abc}$ の最小値は $\boxed{(\ 4\ )}$ である。

解答

(i) 330　(ii) $0<a\leqq e^{-\frac{1}{e}}$　(iii) $3\sqrt{3}-4$　(iv) 32

解説

(i)

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \iff \begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_{n+1}-a_n=2^{n-1} \\ a_{n+1}-2a_n=0 \end{cases}$$

これより $a_n=2^{n-1}$.

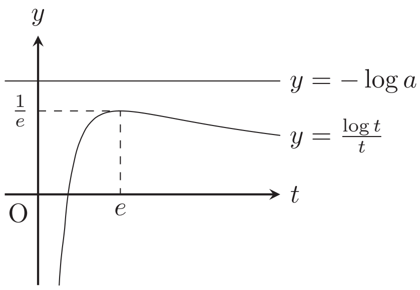
$$\log_2 a_1{a_2}^2{a_3}^3\cdots{a_{10}}^{10}=\sum_{k=1}^{10}\log_2{a_k}^k=\sum_{k=1}^{10}\log_2 2^{k(k-1)}=\sum_{k=1}^{10}k(k-1)$$
$$=\frac{10}{6}(10+1)(2\cdot10+1)-\frac{10}{2}(10+1)=\mathbf{330}$$

(ii) $x\geqq 0$ のとき $a^x\geqq -x$ は常に成り立つので，以下では $x<0$ について考える.

$$\begin{aligned} a^x \geqq -x &\iff x\log a \geqq \log(-x) \\ &\iff \log a \leqq \frac{\log(-x)}{x} \quad (\because x<0) \\ &\iff \log a \leqq -\frac{\log t}{t} \quad (-x=t \text{ と置換した．} t>0 \text{ である}) \\ &\iff -\log a \geqq \frac{\log t}{t} \cdots ① \end{aligned}$$

$f(t)=\dfrac{\log t}{t}$ とすると，$f'(t)=\dfrac{1-\log t}{t^2}$. $f'(t)=0$ を解くと $t=e$ であり，$f(t)$ の増減と $y=f(t)$ のグラフは以下のようになる.

t	$(+0)$	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$(+0)$



グラフより ① が常に成り立つ条件は $-\log a \geqq \dfrac{1}{e} \iff a \leqq e^{-\frac{1}{e}}$．よって a の範囲は $\boldsymbol{0 < a \leqq e^{-\frac{1}{e}}}$．

別解

① のように定数分離せず，$(-\log a)t \geqq \log t$ の形にし，$\begin{cases} y = (-\log a)t \\ y = \log t \end{cases}$ の 2 つのグラフで考えることもできる．

(iii)　領域 D は図の斜線部．（境界を含む）

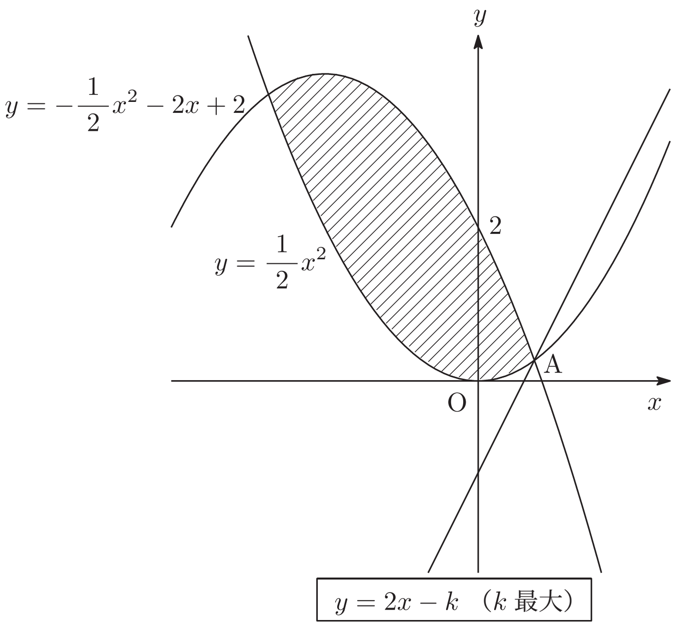
$y = \dfrac{1}{2}x^2$ と $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ を連立することにより，

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$
$$\iff x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$\iff x = -1 \pm \sqrt{3}$$

よって 2 曲線の交点は $(-1+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$（図の A），$(-1-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ となる．

ここで $2x - y = k$ とすると，$y = 2x - k$ は傾き 2，y 切片が $-k$ の直線を表す．

ゆえに k が最大となるのは直線の y 切片が最小となるときである．



$y = \dfrac{1}{2}x^2$ を x で微分すると $y' = x$ となるので，点 A における接線の傾きは $-1+\sqrt{3}\ (< 2)$ である．

したがって直線の y 切片が最小となるのは直線が 点 A を通るときであるので

$$2 - \sqrt{3} = 2(-1+\sqrt{3}) - k \iff k = 3\sqrt{3} - 4$$

よって $2x - y$ の最大値は $\boldsymbol{3\sqrt{3} - 4}$ である．

(iv)　$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ であるので，$a + 2b,\ b + 2c,\ 4c + a$ のそれぞれに相加平均・相乗平均の関係を用いると，

$$a + 2b \geqq 2\sqrt{a \cdot 2b},\ b + 2c \geqq 2\sqrt{b \cdot 2c},\ 4c + a \geqq 2\sqrt{4c \cdot a}$$

等号は $a = 2b$ かつ $b = 2c$ かつ $4c = a$ のときに成立するが，これは $a : b : c = 4 : 2 : 1$ のときすべて同時に満たされる．したがって最小値は，

$$\frac{(a+2b)(b+2c)(4c+a)}{abc} \geqq \frac{2\sqrt{2ab} \cdot 2\sqrt{2bc} \cdot 2\sqrt{4ca}}{abc} = \frac{32abc}{abc} = \boldsymbol{32}$$

［**II**］（記述問題）

x を，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，$I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |t-x| \sin t\, dt$ とおく。このとき，次の問に答えよ。

(i) 関数 $I(x)$ の導関数 $I'(x)$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求め，$I(x)$ を最小にする x の値を求めよ。

(ii) $I(x)$ の最小値を求めよ。

解答

(i)

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int_0^x (t-x)\sin t\, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} (t-x)\sin t\, dt \\ &= -\int_0^x t\sin t\, dt + x\int_0^x \sin t\, dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\, dt - x\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} I'(x) &= -x\sin x + \int_0^x \sin t\, dt + x\sin x - x\sin x - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt + x\sin x \\ &= \int_0^x \sin t\, dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ &= \Big[-\cos t\Big]_0^x - \Big[-\cos t\Big]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{1 - 2\cos x} \end{aligned}$$

となる． $I'(x) = 0$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}$ となるので，関数 $I(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$I'(x)$		$-$	0	$+$	
$I(x)$		↘	最小	↗	

したがって，$I(x)$ を最小にする x の値は $x = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ である．

(ii) (i) より $I(x) = x - 2\sin x + C$（C は積分定数）と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\, dt \\ &= \Big[-t\cos t + \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より $C = 1$ がわかるので，$I(x) = x - 2\sin x + 1$ となる．したがって求める最小値は
$I\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1}$ である．

講評

[I]［小問集合］
(i) [数列] (やや易) 隣接 3 項間漸化式の問題．a_n を求めることができれば，後半の計算は難しくないので確実に取りたい．
(ii) [数学Ⅲの微分] (やや難) 本問は自然対数をとると解きやすくなる．その後は対数関数のグラフと直線の位置関係を調べるか，定数分離の形に持ち込めばよい．
(iii) [図形と方程式] (やや易) 定番の「領域と最大最小」の問題．2 曲線の交点と，その点における接線の傾きをきちんと求めておく必要がある．
(iv) [式と証明] (標準) 相加平均・相乗平均の関係を用いることに気づけば解けただろう．ただし，等号成立まできちんと確認する癖はつけておきたい．

[II]［数学Ⅲの微積分］（標準）内容的には標準レベルである．(i) は積分計算を実行してから微分してもよいだろうが，制限時間を考えると最短の解法を選択する力が求められそうである．

形式に変化はなかった．小問集合では昨年度と同じく 4 問中 2 問が解きやすいセットであった．英語と合わせて 60 分という制限時間を考えるとやはり高得点を取るのは難しい．[I]の (i)(iii) を完答し，[II]をほぼ完答したいところ．[II]で差がつきそうである．目標は 60%．