解答速報

藤田医科大学（ふじた未来入試）　数学

2021年 11月　7日実施

問題 1

(1)　データ 63, 69, 71, 77, 81, 83 の平均値は $\boxed{\text{アイ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　3 つの対数 $\log_2 3$, $\log_9 125$, $\log_5 8$ の積は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3)　xy 平面上のグラフ $y = x^4 + 8x^3 + ax^2 - 20x$ が $x = b$ に対して線対称であるとき，$a = \boxed{\text{カキ}}$，$b = \boxed{\text{クケ}}$ である。ただし a，b は実数とする。

(4)　x，y を正の整数とし，$x > y$ とする。$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}$ を満たす (x, y) の組は $\boxed{\text{コ}}$ 組あり，このうち $x - y$ を最小にする組は $(x, y) = (\boxed{\text{サシ}}, \boxed{\text{スセ}})$ である。

(5)　4 個のさいころを同時に投げるとき，うち 3 個の出た目が同じで，他の 1 個の出た目がこれと異なる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

(6)　三角形 OAB の辺 OA を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AB を 3 : 4 に内分する点を E，線分 BD と線分 OE の交点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

(7)　a，x を実数とする。関数 $f(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} |x^2 - x|\,dx$ について $f(a)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

(8)　公差が 0 でない整数である等差数列について，初項から第 n 項までの和を S_n $(n = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$ とする。S_n が $n = 7$ で最大値 119 をとるとき，初項は $\boxed{\text{ネノ}}$，公差は $\boxed{\text{ハヒ}}$ である。

(9)　関数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 + 9x} - 2}{x}$ に対し，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$ である。

(10)　関数 $f(x) = \dfrac{6\sin x - 6\cos x}{\sin x + \cos x}$ のとき $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \boxed{\text{ホ}}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \log \dfrac{1}{\boxed{\text{マ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	74
ウ	7
$\frac{エ}{オ}$	$\frac{9}{2}$
カキ	11
クケ	−2
コ	7
サシ	28
スセ	21
$\frac{ソ}{タチ}$	$\frac{5}{54}$

解答記号	正解
$\frac{ツ}{テ}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{ト}{ナ}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{ニ}{ヌ}$	$\frac{1}{6}$
ネノ	32
ハヒ	−5
$\frac{フ}{ヘ}$	$\frac{9}{4}$
ホ	8
マ	8

解説

(1)

$$\text{平均} = \frac{63+69+71+77+81+83}{6} = \mathbf{74}$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\frac{(63-74)^2+(69-74)^2+(71-74)^2+(77-74)^2+(81-74)^2+(83-74)^2}{6}} = \mathbf{7}$$

(2)　底を 2 に揃えて計算する．

$$\begin{aligned}\log_2 3\cdot\log_9 125\cdot\log_5 8 &= \log_2 3\cdot\frac{\log_2 125}{\log_2 9}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 5}\\ &= \log_2 3\cdot\frac{3\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\frac{3}{\log_2 5}\\ &= \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

(3)　$f(x)=x^4+8x^3+ax^2-20x$ とおく．これを x 軸方向に $-b$ 平行移動した $f(x+b)$ が偶関数となればよい．$f(x+b)$ の x^3，x の係数がそれぞれ 0 になるので，

$$\begin{cases}4b+8=0\\4b^3+24b^2+2ab-20=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=\mathbf{11}\\b=\mathbf{-2}\end{cases}$$

別解

$f(b-x)=f(x+b)$ が恒等式になることを利用しても良い．

(4)　与式を整理すると，

$$\begin{aligned}&xy-12x-12y=0\\ \iff&(x-12)(y-12)=144\end{aligned}$$

x，y は自然数なので，$x-12>-11$ かつ $y-12>-11$．さらに $x>y$ であることも踏まえると，次のような表になる．

$x-12$	144	72	48	36	24	18	16
$y-12$	1	2	3	4	6	8	9
x	156	84	60	48	36	30	28
y	13	14	15	16	18	20	21

したがって，与式を満たす $(x,\ y)$ の組は **7** 組あり，このうち $x-y$ を最小にする組は $(x,\ y)=\mathbf{(28,\ 21)}$ である．

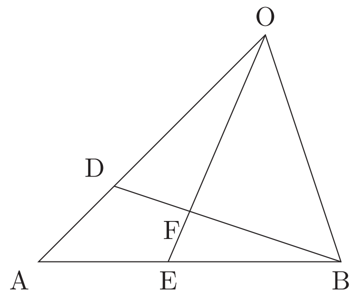
(5)　4 個のさいころを A, B, C, D と区別する．A 〜 D のうちで他の 3 個と異なる目が出るさいころの選び方は 4 通り．それぞれのさいころの目の出方は $6\times5=30$ 通り．

よって求める確率は，

$$\frac{4\cdot30}{6^4}=\mathbf{\frac{5}{54}}$$

(6)　△OAE と直線 BFD に関するメネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{FE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1\Longrightarrow\mathrm{OF}:\mathrm{FE}=7:2$.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathbf{\dfrac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.



(7)　$y=|x^2-x|$ は $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称であるため $a\geqq0$ として考えてよい．

(i)　$0\leqq a\leqq1$ のとき

$$\begin{aligned}f(a)&=\int_a^1(-x^2+x)dx+\int_1^{a+1}(x^2-x)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_a^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^{a+1}\\&=\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$y=f(a)$ は $a\geqq0$ で単調増加であるので $a=0$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}$.

(ii)　$1\leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}f(a)&=\int_a^{a+1}(x^2-x)dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{a+1}\\&=a^2-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$y=f(a)$ は $a\geqq1$ で単調増加であるので $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{5}{6}$.

(i)(ii) より $f(a)$ の最小値は $\mathbf{\dfrac{1}{6}}$.

(8)　題意の等差数列を $\{a_n\}$ とし，公差を d とすると，

$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=\dfrac{7\{a_1+(a_1+6d)\}}{2}=119$ より，$a_1+3d=17$ となる．

S_n が $n=7$ で最大になることから，

$$a_7=a_1+6d\geqq0\iff(a_1+3d)+3d\geqq0\iff17+3d\geqq0\iff d\geqq-\frac{17}{3}$$

$$a_8 = a_1 + 7d \leqq 0 \iff (a_1 + 3d) + 4d \leqq 0 \iff 17 + 4d \leqq 0 \iff d \leqq -\frac{17}{4}$$

よって $-\dfrac{17}{3} \leqq d \leqq -\dfrac{17}{4}$ となるが，d が整数より，$d = \mathbf{-5}$ と定まる．よって，$a_1 = \mathbf{32}$.

(9)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+9x}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+9x}+2}{\sqrt{4+9x}+2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{9}{\sqrt{4+9x}+2} \\ &= \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}\end{aligned}$$

(10) $f(x) = \dfrac{6\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = 6\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形できる．

これより $f'(x) = \dfrac{6}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ であるので，

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{6}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \mathbf{8}$$

また

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx &= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx \\ &= 6\left[-\log\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -6\left(\log 1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -6\log\sqrt{2} \\ &= \log\frac{1}{\mathbf{8}}\end{aligned}$$

的中!!

2021 年 10 月実施 藤田医科大学模試

問題 1

(1)

2 つの変量 x, y についてのデータが次のように与えられている。

x	3	7	1	4	5
y	2	4	5	6	3

このとき，x の分散は $\boxed{\text{ア}}$ であり，x と y の共分散は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。また，x と y の相関係数は

$\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$ である。

(4)

$f(x)=\sin^3 x\cos x,\quad g(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-2h)-f(x+4h)}{h}$ とするとき，

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\quad g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

問題2

xy 平面上に曲線 $C: y = f(x) = x^2 + p$ と直線 $\ell: y = qx$ がある。曲線 C と直線 ℓ が異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ で交わるとき，次の問いに答えよ。ただし $p > 0,\ q > 0,\ \alpha < \beta$ とする。

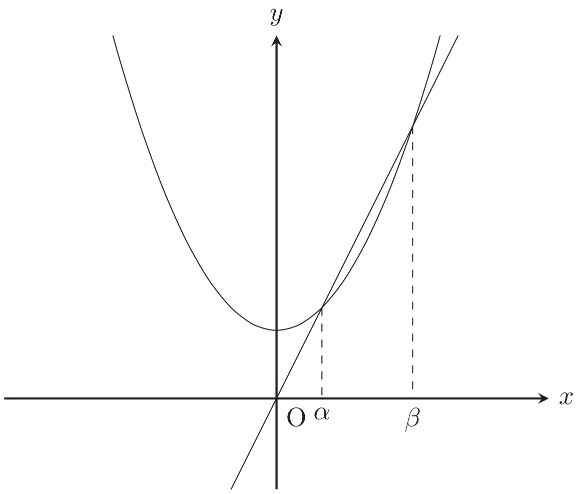
(1) $p,\ q$ が満たすべき条件を求めよ。

(2) $p,\ q$ をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ で表せ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C と直線 ℓ と y 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。$S_1 = S_2$ のとき p を q で表せ。

(4) (3) のとき，$p,\ q$ がともに正の整数であれば $\alpha,\ \beta$ はいずれも正の整数となることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$



(1) 曲線 C，直線 ℓ の方程式を連立させてできる x の方程式

$$x^2 + p = qx \iff x^2 - qx + p = 0 \cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもてばよいので，判別式を D として，

$$D = q^2 - 4p > 0 \iff \boldsymbol{q^2 > 4p}$$

(2) $x = \alpha,\ \beta$ が ① の 2 解となるので解と係数の関係より，$\boldsymbol{p = \alpha\beta} \cdots ②$, $\boldsymbol{q = \alpha + \beta} \cdots ③$ となる.

(3) $S_1 = \displaystyle\int_\alpha^\beta (qx - f(x))dx,\ S_2 = \int_0^\alpha (f(x) - qx)dx$ であるから，

$$\begin{aligned}
S_1 = S_2 &\iff \int_\alpha^\beta (qx - f(x))dx = \int_0^\alpha (f(x) - qx)dx \\
&\iff \int_0^\beta (f(x) - qx)dx = 0 \\
&\iff \int_0^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = 0 \\
&\iff \int_0^\beta \left\{(x-\beta)^2 + (\beta-\alpha)(x-\beta)\right\}dx = 0 \\
&\iff \left[\frac{(x-\beta)^3}{3} + \frac{\beta-\alpha}{2}(x-\beta)^2\right]_0^\beta = 0 \\
&\iff \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta-\alpha}{2}\beta^2 = 0 \\
&\iff -\frac{\beta^2}{6}(\beta - 3\alpha) = 0
\end{aligned}$$

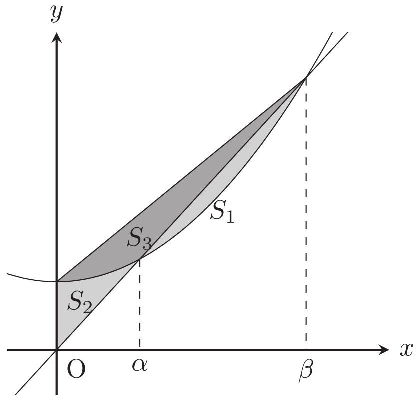
図より明らかに $\beta > 0$ であるから $\beta = 3\alpha \cdots$④．これを②, ③に代入して $p = 3\alpha^2$, $q = 4\alpha \cdots$⑤となるが，ここから α を消去して $\boldsymbol{p = \frac{3}{16}q^2}$.

別解

右図のように面積 S_3 を定義すると，

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &\iff S_1 + S_3 = S_2 + S_3 \\ &\iff \frac{1}{6}(\beta - 0)^3 = \frac{1}{2}\cdot p \cdot \beta \\ &\iff \frac{1}{6}\beta^3 = \frac{1}{2}\alpha\beta^2 \quad (\because p = \alpha\beta) \end{aligned}$$

となり，$\beta > 0$ より $\beta = 3\alpha$ が得られる．(以下略)



(4)　(3) より $3q^2 = 16p$ が成り立つが，右辺は 16 の倍数で 3 と 16 は互いに素なので q^2 は 16 の倍数となり，q が正の 4 の倍数であることがわかる．したがって，⑤より α は正の整数となり，④より β も正の整数である．(証明終)

問題 3

複素数 z の絶対値を $|z|$ と表す。次の問いに答えよ。

(1) 任意の複素数 z_1, z_2 に対して，$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 任意の複素数 z_1 と 0 でない複素数 z_2 に対して，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 任意の複素数 z_1, z_2 に対して，$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ が成り立つことを証明せよ。

(4) 任意の複素数 z_1, z_2, $\cdots$, z_n に対して，

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

が成り立つことを証明せよ。

解答

(1) $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ とおく．ただし a, b, c, d は実数である．

$z_1z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ であるから

$$\begin{aligned}|z_1z_2| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\ &= \sqrt{(a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2)} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\end{aligned}$$

$|z_1| = \sqrt{a^2+b^2},\ |z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$ であるから $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ が成り立つ．　(証明終)

(2) (1) において z_1 を $\dfrac{z_1}{z_2}$ に置き換えると $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|$ つまり $|z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|$ の成り立つことがわかる．$|z_2| \fallingdotseq 0$ なので両辺を $|z_2|$ で割ると証明すべき式になる．　(証明終)

(3) 複素数平面上で 3 点 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(-z_2)$ とおくと三角不等式 $\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{OP} + \mathrm{OQ}$ より $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ が従う．　(証明終)

別解

$$\begin{aligned}&(\text{右辺})^2 - (\text{左辺})^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 - (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 \\ &= 2|z_1\overline{z_2}| - 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\end{aligned}$$

である．$z_1\overline{z_2} = a + bi$ とおくと $|z_1\overline{z_2}| - \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = \sqrt{a^2+b^2} - a$ であるから，これは 0 以上である．

(4) 数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ の場合は両辺が一致するので成立する．

(ii) $n = 2$ の場合は (3) より成立する．

(iii) k を 2 以上の整数として $n = k$ のときに $|z_1 + z_2 + \cdots + z_k| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k|$ が成立すると仮定する．

$n = k+1$ の場合

$$\begin{aligned}&|z_1 + z_2 + \cdots + z_k + z_{k+1}| \\ &= |(z_1 + z_2 + \cdots + z_k) + z_{k+1}| \\ &\leqq |z_1 + z_2 + \cdots + z_k| + |z_{k+1}|\end{aligned}$$

$$\leqq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k|) + |z_{k+1}|$$
$$= |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|$$

これは $n = k + 1$ の場合も成立することを表す.
以上より証明された.　(証明終)

講評

問題 1［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) やや難 (4) 標準 (5) やや易 (6) 易 (7) 標準 (8) 標準 (9) 易 (10) 標準)

差がつく問題は (3)(4)(7)(10) あたりであろうか．(3) は「$x = b$ に対して線対称である」という問題文からどう立式するかで悩んだ受験生が多かったかもしれない．(7) は $x = \frac{1}{2}$ に関して対称であることを利用すると，場合分けが少なくなり解きやすくなる．

問題 2［放物線と直線の囲む面積，整数問題］(易〜標準)

前半は放物線に関する面積問題である．判別式や解と係数の関係など非常に基本的な知識を問うている．(3) では S_2 の面積を求めに行くと，やや計算が面倒である．二つの部分を合わせてまとめて積分する手法を身につけておきたい．(4) ではそれまでの結果を利用する整数問題であるが，$16p = 3q^2$ から q が 4 の倍数であると気付ければ問題はない．

問題 3［複素数の絶対値に関する等式・不等式の証明問題］(易〜標準)

複素数の絶対値に関する，基本的な等式，不等式の証明問題である．証明法もいろいろあって，何を利用するか悩むところである．(1), (2) とも極形式を使えばすぐに証明できるが，ここではそれを利用しない方法を取った．(2) は (1) を利用できることに気付かないと計算量が少し増える．(3) も (1) と同様におくとコーシー・シュワルツの不等式 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \geqq ac+bd$ を示すことになる．もちろんこれでも証明できる．(4) は見るからに数学的帰納法の問題であろう．非常に素直で悩むところはないと思われる．

小問集合は穏やかな難易度で，落とせない問題が多い．とは言え解法の選択で大きく差が付きそうである．大問については，問題 2，および問題 3 の後半を突破すればかなり有利になるだろう．1 次合格のための目標点は 70%.