解答速報

藤田医科大学（前期）　数学

2022年1月20日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　ある試験を行ったところ，1 年生 40 名の平均得点は 10 点，分散は 20，2 年生 60 名の平均得点は 25 点，分散は 20 であった。2 学年 100 名のデータを合わせた平均得点は $\boxed{\text{アイ}}$ 点，分散は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　$(x-7)(x-5)(x+1)(x+7)=405$ の解のうち，整数解は $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし $\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする。

(3)　3 個のサイコロを同時に投げるとき，出た目の積が 8 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4)　$\log_9 x + 4\log_x 3 = 3$ を満たす 2 桁の整数 x は $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(5)　実数 x に対し $4\sin 2x - 5\sin x - 5\cos x + 6$ は $\sin x + \cos x = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小となり，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(6)　$a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$ で定義される数列を $\{a_n\}$ とすると，$\dfrac{a_{16}-a_{13}}{a_{12}-a_9} = \boxed{\text{タチ}}$ である。

(7)　$\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{x^2-9x+8}{\sqrt[3]{x}-2} = \boxed{\text{ツテ}}$ である。

(8)　平面に互いに平行でないベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ があり，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1,\ 3\vec{a} + 5\vec{b} + 6\vec{c} = \vec{0}$ を満たすとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。

(9)　$a,\ b$ を実数の定数とする。4 次方程式 $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 2x + b = 0$ の解の 1 つが $1+i$ であるとき，実数解は $\boxed{\text{ヌネ}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。ただし i は虚数単位である。

(10)　関数 $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{(x-6)^3}{(x-4)^2(x+2)}}$ の $x=7$ における微分係数は $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ である。

(11)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホマ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	19
ウエ	74
オ	2
カ	8
$\frac{キ}{ク}$	$\frac{1}{3}$
ケコ	81

解答記号	正解
$\frac{サ}{シ}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{ス}{セソ}$	$\frac{7}{16}$
タチ	81
ツテ	84
$\frac{ト}{ナニ}$	$\frac{1}{15}$

解答記号	正解
ヌネ	-1
ノ	2
$\frac{ハ}{ヒフ}$	$\frac{5}{27}$
$\frac{ヘ}{ホマ}$	$\frac{8}{15}$

解説

(1) 1 年生の各生徒の得点を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{40}$，2 年生の各生徒の得点を $x_{41},\ x_{42},\ \cdots,\ x_{100}$ とおく．
全体の平均得点を $\overline{x}$ とおくと，

$$\overline{x} = \frac{40 \times 10 + 60 \times 25}{100} = \mathbf{19}$$

次に 1 年生の分散を ${S_1}^2$，2 年生の分散を ${S_2}^2$，全体の分散を S^2 とおくと，

$${S_1}^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{40}}^2}{40} - 10^2 = 20 \cdots ①$$

$${S_2}^2 = \frac{{x_{41}}^2 + {x_{42}}^2 + \cdots + {x_{100}}^2}{60} - 25^2 = 20 \cdots ②$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{100}}^2}{100} - (\overline{x})^2 \\ &= \frac{({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{40}}^2) + ({x_{41}}^2 + {x_{42}}^2 + \cdots + {x_{100}}^2)}{100} - 361 \cdots ③ \end{aligned}$$

① より ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{40}}^2 = 4800$，② より ${x_{41}}^2 + {x_{42}}^2 + \cdots + {x_{100}}^2 = 38700$ となる．これらを ③ に代入して

$$S^2 = \frac{4800 + 38700}{100} - 361 = \mathbf{74}$$

(2)

$$(x-7)(x-5)(x+1)(x+7) = 405 \iff x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 196x - 160 = 0$$

この左辺を $f(x)$ とおく．$f(2) = 0$ となるので，$f(x)$ は $x - 2$ で割り切れる．よって

$$f(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 58x + 80)$$

と因数分解できる．次に $g(x) = x^3 - 2x^2 - 58x + 80$ とおくと $g(8) = 0$ となるので，$g(x)$ は $x - 8$ で割り切れる．よって

$$g(x) = (x-8)(x^2 + 6x - 10)$$

と因数分解できる．
ゆえに $x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 196x - 160 = 0 \iff (x-2)(x-8)(x^2+6x-10) = 0$ となるので，これを満たす解は $x = 2,\ 8,\ -3 \pm \sqrt{19}$．したがって，整数解は $x = \mathbf{2},\ \mathbf{8}$ となる．

注釈

$405 = 5 \times 3^4$ であること，解答欄が 1 桁の整数であることを利用してあてはめて考える方が楽である．

(3) サイコロの目を 2 で割り切れる回数でグループ分けし，$A = \{1,\ 3,\ 5\}$，$B = \{2,\ 6\}$，$C = \{4\}$ とする．例えば，3 個のサイコロの目の組が $\{1, 2, 4\}$ であるとき，$< A,\ B,\ C >$ のように表すことにする．余事象につ

いて考える．出た目の積が 8 で割り切れないのは，3 個のサイコロの目が，$< A,\ A,\ A >$, $< A,\ A,\ B >$, $< A,\ A,\ C >$, $< A,\ B,\ B >$ のときである．これらの確率はそれぞれ，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$${}_3\mathrm{C}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

であり，これらの和は $\dfrac{2}{3}$ となる．よって求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$.

(4)　真数，底の条件より，$0 < x < 1,\ 1 < x$ である．

$$\log_9 x + 4\log_x 3 = 3 \iff \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{4}{\log_3 x} = 3 \iff (\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 8 = 0$$

これを解いて

$$\log_3 x = 2,\ 4 \iff x = 9,\ 81$$

これらの x の値は先の条件を満たす．このうち 2 桁の整数は **81**.

(5)　$\sin x + \cos x = t$ とおくと，$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}(t^2 - 1)$．$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である．

与式は

$$4t^2 - 5t + 2 = 4\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{7}{16}$$

となるから，$t = \sin x + \cos x = \boldsymbol{\dfrac{5}{8}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{16}}$ をとる．

(6)

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \iff a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

であるので，

$$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1} \iff a_n = 2 \cdot 3^n - 1$$

よって

$$\frac{a_{16} - a_{13}}{a_{12} - a_9} = \frac{(2 \cdot 3^{16} - 1) - (2 \cdot 3^{13} - 1)}{(2 \cdot 3^{12} - 1) - (2 \cdot 3^9 - 1)} = \frac{3^{16} - 3^{13}}{3^{12} - 3^9} = 3^4 = \mathbf{81}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} \\
&= \lim_{x \to 8} \frac{(x-1)(x-8)\left\{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right\}}{x - 8} \\
&= \lim_{x \to 8} (x-1)\left\{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right\} \\
&= 7(4 + 4 + 4) = \mathbf{84}
\end{aligned}$$

別解

ロピタルの定理を用いると一瞬で求まる．

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 9x + 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \to 8} \frac{2x - 9}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{7}{\frac{1}{12}} = \mathbf{84}$$

別解

$\sqrt[3]{x}=t$ と置き換えることにより，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 8}\frac{x^2-9x+8}{\sqrt[3]{x}-2}&=\lim_{t\to 2}\frac{t^6-9t^3+8}{t-2}\\&=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)(t^3-1)}{t-2}\\&=\lim_{t\to 2}(t^2+2t+4)(t^3-1)\\&=12\cdot 7=\mathbf{84}\end{aligned}$$

別解

さきほどの式にロピタルの定理を用いるとさらに簡単に求まる．

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^6-9t^3+8}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{6t^5-27t^2}{1}=192-108=\mathbf{84}$$

(8)　$-6\overrightarrow{c}=3\overrightarrow{a}+5\overrightarrow{b}$ であるので，

$$|-6\overrightarrow{c}|=|3\overrightarrow{a}+5\overrightarrow{b}|$$

両辺 2 乗することにより，

$$36|\overrightarrow{c}|^2=9|\overrightarrow{a}|^2+30\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+25|\overrightarrow{b}|^2$$

$|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|=1$ より，

$$2=30\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\iff\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}$$

(9)　すべての係数が実数であるため，$1+i$ が解であるならば $1-i$ も解である．$1+i,\ 1-i$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは，$x^2-2x+2=0$ であり，与えられた 4 次方程式の左辺は x^2-2x+2 で割り切れる．ここで，

$$x^4+ax^3+2x^2+2x+b=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+2)x+2a+4\}+(2a+6)x-4a+b-8$$

であることから

$$\begin{cases}2a+6=0\\-4a+b-8=0\end{cases}$$

これを解いて，$a=-3,\ b=-4$ が求まる．
このとき，$(x^2-2x+2)(x^2-x-2)=0\iff(x^2-2x+2)(x+1)(x-2)=0$ であるから，求める実数解は $\mathbf{-1}$ と $\mathbf{2}$ である．

別解

上の解では，x^2-2x+2 で割っているが，次のように恒等式を用いて解くこともできる．
与えられた 4 次方程式の左辺は，実数 $p,\ q$ を用いて次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}x^4+ax^3+2x^2+2x+b&=(x^2-2x+2)(x^2+px+q)\\&=x^4+(p-2)x^3+(-2p+q+2)x^2+(2p-2q)x+2q\end{aligned}$$

係数を比較すると，

$$\begin{cases}a=p-2\\2=-2p+q+2\\2=2p-2q\\b=2q\end{cases}$$

これを解くと，$(a,\ b,\ p,\ q)=(-3,\ -4,\ -1,\ -2)$ を得る．よって，

$$x^4+ax^3+2x^2+2x+b=0\iff(x^2-2x+2)(x^2-x-2)=0\iff(x^2-2x+2)(x+1)(x-2)=0$$

より，求める実数解は $\mathbf{-1}$ と $\mathbf{2}$ である．

(10)　$x>6$ のとき，両辺の自然対数をとると，

$$\log f(x)=\frac{1}{4}\{3\log(x-6)-2\log(x-4)-\log(x+2)\}$$

この両辺を x で微分することにより，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-6}-\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)\iff f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{x-6}-\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)f(x)$$

よって，$x=7$ を代入することで

$$f'(7)=\frac{1}{4}\left(3-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{5}{27}}$$

(11)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx$$

ここで，$t=\cos x$ とおくと

$$dt=-\sin x\ dx\qquad\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1\to\ 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int_1^0(1-t^2)^2\,(-dt)\\&=\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt\\&=\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\\&=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\\&=\mathbf{\frac{8}{15}}\end{aligned}$$

別解

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおくと，2 以上の任意の自然数 n に対して，

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

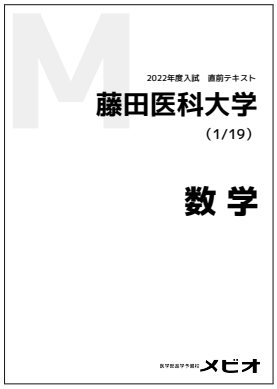
が成立するので，

$$\begin{aligned}I_5&=\frac{4}{5}I_3\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1\\&=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\mathbf{\frac{8}{15}}\end{aligned}$$

的中!!

藤田医科大学直前（1/19）試験日の前日授業

40 個の値からなるデータを A 群 15 個，B 群 25 個の 2 つに分けたところ，A 群のデータの平均は 12, 分散は 30 であり，B 群のデータの平均は 20, 分散は 38 であった．このとき，40 個の値全体のデータの平均は $\boxed{\text{ナニ}}$ であり，分散は $\boxed{\text{ヌネ}}$ である．



的中!!

藤田医科大学模試（2021 年 10 月 3 日 実施）

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}}{\sin 3x} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$ である。

問題 2

座標空間ですべての頂点が格子点となっている直方体を格子点直方体と呼ぶことにする。ただし格子点とは x 座標，y 座標，z 座標がすべて整数となっている点であり，直方体には立方体も含まれる。1 つの頂点が原点にあり，原点から出る 3 つの辺がそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある格子点直方体について，次の問いに答えよ。ただし回転させて重なる直方体であっても異なる格子点に頂点があるものは，異なる直方体として数える。

(1) 原点から出る 3 辺がそれぞれ異なる長さ 2, 3, 4 である格子点直方体は何通り作れるか。

(2) 原点から出る 3 辺の長さの和が 9 である格子点直方体は何通り作れるか。

(3) 体積が 64 となる格子点直方体は何通り作れるか。

(4) 体積が 1800 となる格子点直方体は何通り作れるか。

解答

x 軸，y 軸，z 軸に平行な辺の長さをそれぞれ $x,\ y,\ z$ とし，まず $x,\ y,\ z$ の組を考える．次に，負の座標を考慮して $2^3=8$ 倍すれば格子点直方体の総数が求まる．

(1) $x,\ y,\ z$ の組は，2, 3, 4 の順列と等しいので，$3!=6$ 通り．

よって，求める総数は $6\times 8=$ **48 (通り)**．

(2) $x+y+z=9,\ x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1$ となる $x,\ y,\ z$ の組と，9 個の○の間に仕切り 2 本を入れる入れ方と 1 対 1 に対応するので，その場合の数は

$$ {}_8\mathrm{C}_2=28\ (\text{通り}) $$

よって，求める総数は $28\times 8=$ **224 (通り)**．

(3) $xyz=64,\ x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1$ となる $x,\ y,\ z$ の組を考える．$64=2^6$ であるから，$x=2^a,\ y=2^b,\ z=2^c$ とおくと，

$$ 2^a2^b2^c=2^6 \iff a+b+c=6 \quad a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0 $$

を満たす整数 $a,\ b,\ c$ の組を考えればよい．これは 6 個の○と仕切り 2 本を 1 列に並べる並べ方と 1 対 1 に対応するので，その場合の数は

$$ \frac{8!}{6!2!}=28\ (\text{通り}) $$

よって，求める総数は $28\times 8=$ **224 (通り)**．

(4) $xyz=1800,\ x\geqq 1,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1$ となる $x,\ y,\ z$ の組を考える．$1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$ であるから，その素因数を用いて

$$ x=2^{p_1}3^{q_1}5^{r_1},\ y=2^{p_2}3^{q_2}5^{r_2},\ z=2^{p_3}3^{q_3}5^{r_3} $$

とおく．2 の指数に着目すると，$p_1+p_2+p_3=3,\ p_1\geqq 0,\ p_2\geqq 0,\ p_3\geqq 0$ を満たす整数 $p_1,\ p_2,\ p_3$ の組は (3) と同様に考えて $\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 通りである．同様にして，

$$ q_1+q_2+q_3=2,\ q_1\geqq 0,\ q_2\geqq 0,\ q_3\geqq 0 \text{ を満たす整数 } q_1,\ q_2,\ q_3 \text{ の組は } \frac{4!}{2!2!}=6 \text{ 通り} $$

$$ r_1+r_2+r_3=2,\ r_1\geqq 0,\ r_2\geqq 0,\ r_3\geqq 0 \text{ を満たす整数 } r_1,\ r_2,\ r_3 \text{ の組は } \frac{4!}{2!2!}=6 \text{ 通り} $$

であるから，求める総数は $10\times 6\times 6\times 8=$ **2880 (通り)**．

問題 3

原点を O とする座標平面上の曲線 C を媒介変数 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて次のように定義する。

$$C : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta + (k-\theta)\cos\theta \end{cases}$$

ここで定数 k は $0 < k < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数である。

(1) xy 平面における曲線 C のグラフの増減，極値を調べよ。

(2) $k = \dfrac{\pi}{3}$ のとき xy 平面上の $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に曲線 C のグラフの概形をかけ。

(3) $0 < k < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の任意の k について原点を通る直線と曲線 C の交点の個数は 1 以下であることを示せ。

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲の任意の x に対してただ 1 つの θ が定まり，θ に対してただ 1 つ y が定まるから， y は x の関数として $y = f(x)$ と書ける。曲線 C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，点 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を定め（ただし $0 < a < b < 1$ ），線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を S とする。一方，関数 $g(x)$ を $g(x) = f(x) - xf'(x)$ と定義し， $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ とおく。

(4) S を I で表せ。

(5) $g(x)$ を x の式で表し， $a = \dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき S を求めよ。

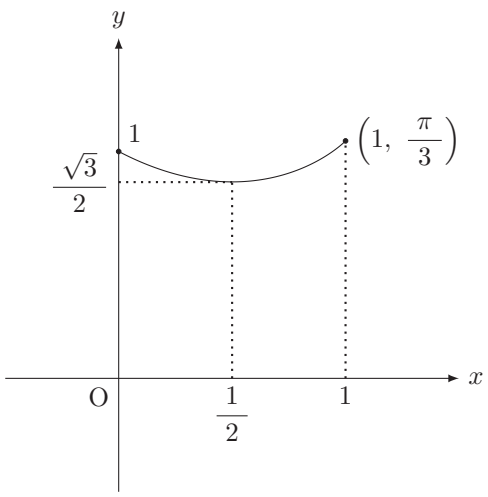
解答

(1) $\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = 0 \iff \theta = 0$ であり，$\dfrac{dy}{d\theta} = (\theta - k)\sin\theta$ より $\dfrac{dy}{d\theta} = 0 \iff \theta = 0,\ k$ であるから，増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	k	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$	$\swarrow$	$\begin{pmatrix} \cos k \\ \sin k \end{pmatrix}$	$\nwarrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

したがって，x に対して y は， **$0 \leqq x \leqq \cos k$ のとき減少し，$\cos k \leqq x \leqq 1$ のとき増加する**．また，y は $\theta = k$ のとき **極小値 $\sin k$** をとる．

(2)



(3) 原点を通る直線のうち，直線 $x = 0$ は明らかに曲線 C との交点を 1 つもつ．それ以外の場合，原点を通る直

線の方程式を $y = mx$ とする．この直線上に C 上の点があるとき，

$$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta + (k-\theta)\cos\theta$$

を代入して，

$$\sin\theta + (k-\theta)\cos\theta = m\cos\theta \cdots ①$$

となる．この θ についての方程式が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解を高々 1 つもつことを示せばよい．$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ は明らかに解ではないので，$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$$① \iff m = \tan\theta - \theta + k \cdots ②$$

となる．ここで，$h(\theta) = \tan\theta - \theta + k$ とおくと，$h'(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1 \geqq 0$ であるから，$h(\theta)$ は $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加であることがわかる．したがって，方程式 ② は任意の m に対して解の個数が高々 1 個である．　(証明終)

注：図形的には O と C 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta + (k-\theta)\cos\theta)$ を結ぶ線分の傾き $\dfrac{\sin\theta + (k-\theta)\cos\theta}{\cos\theta} = \tan\theta - \theta + k$ が単調増加であることを示したということである．

別解

$x = 0$ と 曲線 C の交点は明らかに 1 個である．原点を通る直線で $x = 0$ 以外のものと曲線 C が 2 個以上の点で交わると仮定すると，$0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ となる $\alpha,\ \beta$ で，

$$\frac{\sin\alpha + (k-\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta + (k-\beta)\cos\beta}{\cos\beta}$$

$$\iff \tan\alpha + k - \alpha = \tan\beta + k - \beta$$

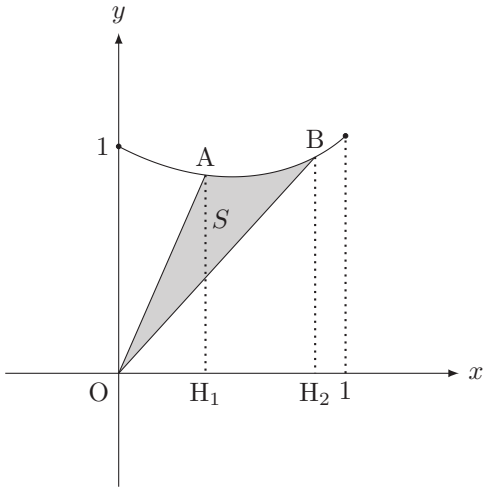
$$\iff \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} = 1 \cdots ③$$

となるものが存在する．ここで，平均値の定理により

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\cos^2\gamma} \text{ かつ } \alpha < \gamma < \beta$$

となる γ が存在するが，$\dfrac{1}{\cos\gamma} > 1$ より③に矛盾する．したがって，原点を通る直線と曲線 C の交点の個数は 1 以下である．　(証明終)

(4)　S は以下の灰色部分の面積である．



$\mathrm{H}_1(a,\ 0)$, $\mathrm{H}_2(b,\ 0)$ とすると，

$$\begin{aligned}S &= (\triangle\mathrm{OAH}_1\text{の面積})\\ &\quad + (y=f(x)\text{ と }x\text{ 軸および 2 直線 }x=a,\ x=b\text{ で囲まれる部分の面積})\\ &\quad - (\triangle\mathrm{OBH}_2\text{の面積})\\ &= \frac{1}{2}af(a)+\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}bf(b)\end{aligned}$$

である．一方，部分積分法により

$$\begin{aligned}I &= \int_a^b g(x)\,dx\\ &= \int_a^b \{f(x)-xf'(x)\}\,dx\\ &= \int_a^b f(x)\,dx-\left(\Big[xf(x)\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\,dx\right)\\ &= af(a)-bf(b)+2\int_a^b f(x)\,dx\\ &= 2S\end{aligned}$$

であるから， $S=\boldsymbol{\frac{1}{2}I}$ である．

(5)

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x)-xf'(x)\\ &= y-x\frac{dy}{dx}\\ &= y-x\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\\ &= \sin\theta+(k-\theta)\cos\theta-\cos\theta\cdot\frac{(\theta-k)\sin\theta}{-\sin\theta}\\ &= \sin\theta\\ &= \sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \boldsymbol{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

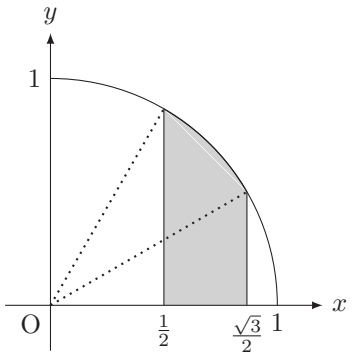
であるから， $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

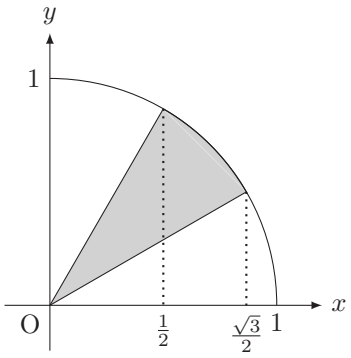
$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}I\\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx\cdots④\end{aligned}$$

ここで，④ の定積分の値は下図左の灰色部分の面積に等しく，これは半径 1 で中心角が $\frac{\pi}{6}$ である扇形（下図右）の面積に等しいので，

$$④=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\pi$$

$$= \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{24}}$$





的中!!

藤田医科大学直前（1/19）試験日の前日授業

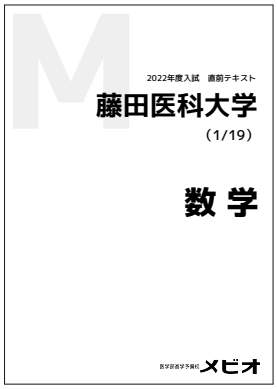
次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする．

$$\begin{cases} x = \sin t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq 2\pi$ である．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ．

(2) C で囲まれた図形の面積を求めよ．



講評

問題 1［小問集合］

(1) やや易 (2) やや易 (3) 標準 (4) 易 (5) 易 (6) やや易 (7) 標準 (8) 易 (9) やや易 (10) 標準 (11) やや易

例年通り，小問集合であった．設問数が 11 個というのも想定内．難易度は昨年度と同程度のものが多いが，特に難しい問題がない分，やや易化していると言える．典型的処理を淀みなく押し進めてほしいところ．ここは高得点が欲しいが，処理の精度の差により受験生の得点はばらつくだろう．

(2)　左辺を展開せずに，代入で解を探すのが楽である．

(3)　サイコロの目を，2 で割り切れる回数でグループ分けした上で，余事象を考えるとよい．

(7)　分母・分子に $(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4$ をかけて分母を有理化すればよいが，ロピタルの定理を使っても答は出る．

(10)　$\log f(x)$ を微分すると計算が楽になる．

できない問題はどんどん後回しにしてできる問題で稼げるだけ稼ぐべきである．

問題 2［場合の数］（やや難）

基本的には順列の問題である．原点から出る 3 辺の長さをまず考え，符号は後から決めればよい．最終的には x, y, z 軸方向の辺の長さは全て区別することになるので，○と仕切りの並べ方として考えると非常にシンプルに解くことができる．(4) も 2^3 の分配の仕方，3^2 の分配の仕方，5^2 の分配の仕方を独立に考えると楽に解ける．

問題 3［数学Ⅲの微積分］（難）

(1), (2) は通常のパラメータで表された曲線の描画なので問題はないだろう．(3) では $y=mx$ と連立させて解の個数を数えるのは素直な発想であるが，$(0,\ 0)$ と $(x(\theta),\ y(\theta))$ を結んでできる線分の傾き $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}$ が単調であるという発想でも解くことができる．(4) は I を部分積分で計算してみれば S との関係は見える．そこで誘導に従って I を求めにいけばよいのだが，$g(x)=f(x)-xf'(x)$ をパラメータに関する微分として正確に計算する技術が必要となる．難易度は高いので，正答率は低いであろう．

問題 1 はなるべく正確に解ききりたいところである．その上で問題 2，問題 3 でどれだけ立ち回れたかの勝負となるが，問題 3 については難易度が高くあまり大きな差はついていないだろう．2021 年度前期と比べると，問題 1 はやや易化，問題 2，3 はトータルするとやや難化している．1 次合格のための目標は 55%．