解答速報

大阪医科薬科大学（前期）　数学

2022年2月10日実施

〔1〕 黒石 3 個と白石 7 個が袋に入っている。袋から 1 個ずつ 10 個の石を取り出して一列に並べる。

(1) 黒と白の合計 10 個の石の相異なる並び方の総数を求めよ。

(2) 黒石が 3 個連続する確率を求めよ。

(3) 並べた列が「 2 つ以上の連続した白石の両端に黒石がある」という部分を含む確率を求めよ。

解答

以下，黒石を B，白石を W と表すことにする．

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \mathbf{120}$ 通り．

(2) $\boxed{\mathrm{BBB}}$ と 7 個の W の計 8 個の並べ方を考えればよいので，求める確率は $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_1}{120} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}$.

(3) 題意の余事象は，「任意の 2 つの B と B の間について，W が 0 個か 1 個となる」である．余事象は以下のように分けられる．

(i) $\boxed{\mathrm{BBB}}$ と 7 個の W でできる列．これは (2) から 8 通り．

(ii) $\boxed{\mathrm{BWBB}}$ または $\boxed{\mathrm{BBWB}}$ と，6 個の W でできる列．これは ${}_7\mathrm{C}_1 \times 2 = 14$ 通り．

(iii) $\boxed{\mathrm{BWBWB}}$ と 5 個の W でできる列．これは ${}_6\mathrm{C}_1 = 6$ 通り．

(i)〜(iii) は排反なので，求める確率は $1 - \dfrac{8+14+6}{120} = \dfrac{\mathbf{23}}{\mathbf{30}}$.

〔2〕 n を自然数とする。$0!=1$，関数 $g(x)$ に対して $\dfrac{d^0}{dx^0}g(x)=g(x)$ とする。

(1) $0 \leqq m \leqq n$ なる整数 m に対して，$(x+1)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m)$ を示せ。

(2) $f(x)$ が実係数の n 次多項式のとき，$f(x+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}f(x)$ を示せ。

解答

(1) $m \geqq k$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m)&=\frac{1}{k!}m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}\\&=\frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot x^{m-k}\\&={}_m\mathrm{C}_k x^{m-k}\end{aligned}$$

であるので，

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^m)=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k x^{m-k}=(x+1)^m$$

（証明終）

(2) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n \neq 0)$ とすると，$f(x)$ の各項 a_lx^l $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ について，$l<k$ のとき $\dfrac{d^k}{dx^k}(x^l)=0$ であることと (1) の結果より，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_lx^l)=\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_lx^l)=a_l(x+1)^l$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=a_n(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots+a_1(x+1)+a_0\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_nx^n)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_{n-1}x^{n-1})\\&\quad+\cdots+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_1x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(a_0)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}f(x)\end{aligned}$$

（証明終）

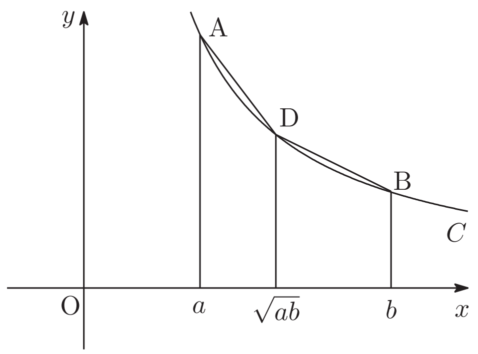
〔3〕 $0 < a < b$ とする。曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ 上の x 座標が a, b である点をそれぞれ A, B とする。曲線 C，直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれる部分を R とおく。x 座標が $\sqrt{ab}$ である曲線 C 上の点を D として，線分 AD, DB, $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれる図形を T とおく。x 座標が $\dfrac{a+b}{2}$ である曲線 C 上の点における C への接線を m として，直線 m, $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれる台形を U とおく。図形 R, T, U の面積をそれぞれ $S(R)$, $S(T)$, $S(U)$ とおく。

(1) $S(R)$ を a, b で表せ。

(2) $S(T)$, $S(U)$ を a, b で表せ。

(3) 不等式 $\dfrac{2}{a+b} < \dfrac{\log b - \log a}{b-a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ を示せ。

解答



(1)

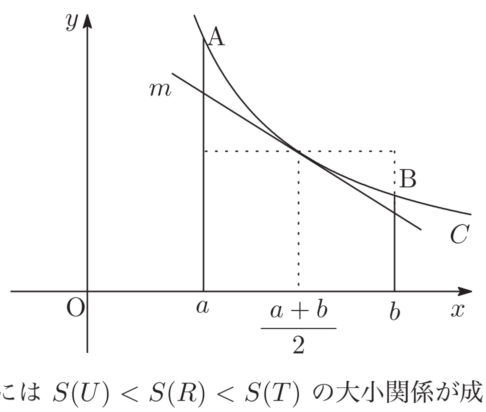
$$S(R) = \int_a^b \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_a^b = \boldsymbol{\log b - \log a}$$

(2) $0 < a < b$ より，$\sqrt{a^2} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2}$ となるので，$a < \sqrt{ab} < b$. よって曲線 C において点 D は点 A と点 B の間にある．これより

$$\begin{aligned} S(T) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{ab} - a\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(b - \sqrt{ab}\right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{ab} + b\right)\left(\sqrt{ab} - a\right) + \left(a + \sqrt{ab}\right)\left(b - \sqrt{ab}\right)}{2ab} \\ &= \boldsymbol{\frac{b-a}{\sqrt{ab}}} \end{aligned}$$

また，$S(U)$ は 縦の長さが $\dfrac{2}{a+b}$，横の長さが $b - a$ の長方形の面積に等しいので，

$$S(U) = \frac{2}{a+b}(b-a) = \boldsymbol{\frac{2(b-a)}{a+b}}$$



(3) $y = \dfrac{1}{x}$ は下に凸のグラフであるので，$S(R)$, $S(T)$, $S(U)$ の間には $S(U) < S(R) < S(T)$ の大小関係が成り立つ．(1)(2) を用いると

$$\frac{2(b-a)}{a+b} < \log b - \log a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

となり，辺々 $b - a (> 0)$ で割ると

$$\frac{2}{a+b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

が成り立つ．　(証明終)

$\boxed{\text{別解}}$

$0 < a < b$ より，

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a+b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{2(b-a)}{a+b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{2\left(\dfrac{b}{a}-1\right)}{1+\dfrac{b}{a}} < \log\frac{b}{a} < \frac{\dfrac{b}{a}-1}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}
\end{aligned}$$

よって $t = \dfrac{b}{a}$ とおくと，$t > 1$ のとき

$$\frac{2(t-1)}{1+t} < \log t < \frac{t-1}{\sqrt{t}} \cdots (*)$$

が成り立つことを示せばよい．

まず $f(t) = \log t - \dfrac{2(t-1)}{1+t}$ とおくと，

$$f(t) = \log t + \frac{4}{1+t} - 2$$

であり，

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$$

よって $f(t)$ は $t > 1$ で単調に増加する．$f(1) = 0$ より，$t > 1$ のとき $f(t) > 0$ が成り立つ．

次に $g(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}} - \log t$ とおくと，

$$g(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \log t$$

であり，

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\left(\sqrt{t}-1\right)^2}{2t\sqrt{t}} > 0$$

よって $g(t)$ は $t > 1$ で単調に増加する．$g(1) = 0$ より，$t > 1$ のとき $g(t) > 0$ が成り立つ．

以上より，$t > 1$ のとき $(*)$ が成り立つので，題意は示された．　（証明終）

解説動画公開中！

https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q

〔4〕 $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対し，平面上の点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sin\theta)$ を対角線とする正方形 ABCD を考える。ただし AC の中点を M とするとき，M のまわりに反時計回りに A を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点が B であるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ の成分を求めよ。

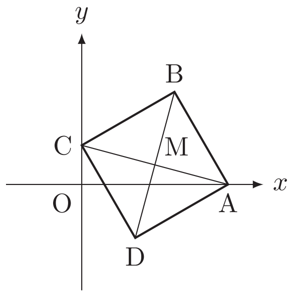
(2) 点 B, D の座標を求めよ。

θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，正方形 ABCD の周と内部が通過してできる図形を W とする。

(3) W は $x^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域に含まれることを示せ。

(4) W の面積を S とするとき $S \geqq 2$ を示せ。

解答



(1) $\mathrm{M}\left(\dfrac{\cos\theta}{2},\ \dfrac{\sin\theta}{2}\right)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \left(\dfrac{\cos\theta}{2},\ -\dfrac{\sin\theta}{2}\right)$ である．複素数で考えて，$\left(\dfrac{\cos\theta}{2} - \dfrac{\sin\theta}{2}i\right) \times i = \dfrac{\sin\theta}{2} + \dfrac{\cos\theta}{2}i$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\boldsymbol{\frac{\sin\theta}{2}},\ \boldsymbol{\frac{\cos\theta}{2}}\right)$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \\ &= \left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right) + \left(\frac{\sin\theta}{2},\ \frac{\cos\theta}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{2},\ \frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}\right)$．

次に，$\overrightarrow{\mathrm{MD}} = -\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}} \\ &= \left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right) - \left(\frac{\sin\theta}{2},\ \frac{\cos\theta}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2},\ \frac{\sin\theta-\cos\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{D}\left(\boldsymbol{\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{2}}\right)$．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\cos\theta| \leqq 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\sin\theta| \leqq 1$ である．また，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| &= \sqrt{\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{4} + \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\sin 2\theta}{2}}\end{aligned}$$

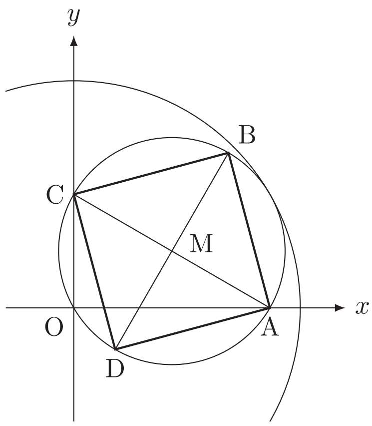
ここで，$-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ より，$0 \leqq \dfrac{1+\sin 2\theta}{2} \leqq 1$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \leqq 1$ である．

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| &= \sqrt{\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{4}+\frac{(\sin\theta-\cos\theta)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\sin 2\theta}{2}} \end{aligned}$$

同様に，$0 \leqq \dfrac{1-\sin 2\theta}{2} \leqq 1$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| \leqq 1$ である．よって，4 点 A，B，C，D は $x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域に含まれる．この領域は凸領域であることから，W は $x^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域内に含まれることが示された． （証明終）

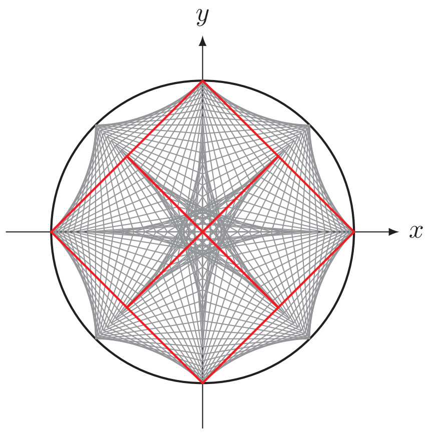
別解

常に $\mathrm{OM} = \dfrac{1}{2}$ であり，また 4 点 A, B, C, D は M を中心として半径が $\dfrac{1}{2}$ の円上にある．よって正方形 ABCD の周と内部は必ずこの円の周または内部にある．この円は，円 $x^2+y^2=1$ に内接する円なので，W は $x^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域に含まれる． （証明終）



(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 1$ を得る．よって，正方形 ABCD の対角線の長さは常に 1 であるから，その面積は $\dfrac{1}{2}$ となる．また，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，4 つの正方形の和集合の面積は 2 となるので，θ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を動くとき，$S \geqq 2$ であることが示された． （証明終）

※　正方形 ABCD が通過する領域は下図のようになる．



〔5〕 数字 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の順列 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対して，xy 平面上の点の集合 $\{(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \cdots,\ (n,\ x_n)\}$ を考える。この集合が直線 $y=x$ に関して線対称であるような順列をここでは対称な順列と呼ぶことにする。対称な順列の個数を a_n とするとき，$a_1=1,\ a_2=2$ である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

(2) すべての自然数 k に対し，$a_{3k+1} \equiv a_{3k} \pmod 3$，$a_{3k+2} \equiv 2a_{3k} \pmod 3$ を示せ。ただし，整数 $a,\ b$ と正整数 m について，$a-b$ が m の倍数であるとき $a \equiv b \pmod m$ と表す。

(3) すべての自然数 n に対し，a_n は 3 の倍数でないことを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) (i) $x_n = n$ のとき

$$\{(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \cdots,\ (n-1,\ x_{n-1}),\ (n,\ n)\}$$

が直線 $y=x$ に関して線対称となるのは，

$$\{(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \cdots,\ (n-1,\ x_{n-1})\}$$

が直線 $y=x$ に関して線対称となるときなので，a_{n-1} 通りある．

(ii) $x_n \fallingdotseq n$ のとき

$x_n = a$ とおく．

$$\{(1,\ x_1),\ (2,\ x_2),\ \cdots,\ (n-1,\ x_{n-1}),\ (n,\ a)\}$$

が直線 $y=x$ に関して線対称となるのは，$x_a = n$ であり，さらに $1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ から a を除いた $n-2$ 個の順列が対称になるときなので，各 a について a_{n-2} 通りある．

a は 1 から $n-1$ までの $n-1$ 通りあるので，この場合の総数は $(n-1)a_{n-2}$ 通りある．

以上より，$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ が成立する．　(証明終)

(2) (1) の漸化式を使うと，

$$a_{3k+1} = a_{3k} + 3ka_{3k-1}$$

より，

$$a_{3k+1} - a_{3k} = 3ka_{3k-1}$$

なので $a_{3k+1} \equiv a_{3k} \pmod 3$ である．また，

$$\begin{aligned} a_{3k+2} &= a_{3k+1} + (3k+1)a_{3k} \\ &= a_{3k} + 3ka_{3k-1} + (3k+1)a_{3k} \\ &= (3k+2)a_{3k} + 3ka_{3k-1} \end{aligned}$$

より，

$$a_{3k+2} - 2a_{3k} = 3ka_{3k} + 3ka_{3k-1}$$

なので $a_{3k+1} \equiv 2a_{3k} \pmod 3$ である．　(証明終)

(3) まず，すべての自然数 n に対して $a_{3n} \equiv 1 \pmod 3$ であることを数学的帰納法で示す．

(i)　$n=1$ のとき

$$a_3=2+2\cdot 1=4$$

より成立する．

(ii)　$n=k$ のとき $a_{3k}\equiv 1 \pmod 3$ が成立すると仮定すると，(2) より

$$a_{3k+1}\equiv a_{3k}\equiv 1 \pmod 3$$

$$a_{3k+2}\equiv 2a_{3k}\equiv 2 \pmod 3$$

であり，

$$a_{3k+3}\equiv a_{3k+2}+(3k+2)a_{3k+1}\equiv 2+3k+2\equiv 1 \pmod 3$$

となるので，$n=k+1$ のときも成立する．

以上より，すべての自然数 n に対して $a_{3n}\equiv 1 \pmod 3$ が成立する．$a_1=1$，$a_2=2$ であり，

$$a_{3n+1}\equiv a_{3n}\equiv 1,\ a_{3n+2}\equiv 2a_{3n}\equiv 2 \pmod 3$$

となるので，すべての自然数 n に対して a_n は 3 の倍数ではない．　（証明終）

講評

〔1〕［場合の数と確率］（標準）(1), (2) は完答が必要．(3) は方針次第で作業量に差がつくだろう．

〔2〕［数学Ⅲの微積分］（標準）二項定理と高階微分の比較をするだけで計算はほとんど必要ないのだが，慣れていないと $\sum$ の処理などで混乱しそうである．(2) は具体的に書き下して (1) を使うだけの問題と気付けるかどうか．

〔3〕［数学Ⅲの微積分］（やや易）この問題は手をつけやすかっただろう．面積計算も単純な積分や台形公式だけで出せる．その大小比較も図形的に明らかなもので，それを変形するとそのまま (3) の不等式になっている．ここは完答したい．

〔4〕［ベクトル，線分の通過領域］（難）(2) までは解いておきたい．(3) も OB, OD の長さを考えるとわかる．(4) 特定の θ の値に対する正方形の和集合の面積が 2 となることに気付けるとよいが，難しかっただろう．

〔5〕［数列，整数］（難）並べ替えの対称性に関する問題であるが，問題の設定が非常に抽象的に書かれているのでそこが読み切れないと取り組みにくかったであろう．撹乱数列の問題になじみがあればその類題であるとわかる．また (3) の証明も数学的帰納法を利用することに見当はつくだろうが，記述がなかなか難しい．(1) が証明できなくても，与えられた漸化式を使えば (2)(3) は解ける．そこで得点を稼ぎたい．

数学的に内容の深い問題が多かった．証明問題も非常に多く，センスがとても必要とされる．やみくもに計算に走っても手は出なかったであろう．2021 年前期と比較して，難易度は上がっている．〔3〕は完答したい．〔1〕,〔2〕,〔4〕では前半をしっかりと得点することが必要．〔5〕は後半だけでも解きたいところ．目標は 55%．

解説動画公開中！

https://www.youtube.com/channel/UCwE0Fes3Ch0EyoPRWeeYB0Q