医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2021年 2月3日実施

1 (1) 3 直線 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $3x-y-6=0$ の各交点を頂点とする三角形に内接する円の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ である．

(2) ${}_{20}\mathrm{C}_7$ と $\dfrac{20\,!}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2}$ の最大公約数を素因数分解すると $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) 複素数平面上の点 $z=\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi$ を点 $z_0=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}i$ を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点は，$w=\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi$ である．ただし，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は実数とする．

(4) $f(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$ とするとき，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{\text{カ}}$ である．

(5) $\triangle$ABC の内部にある点 P は，$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たすという．2 点 A, P を結ぶ直線 AP と直線 BC との交点を D とするとき，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\boxed{\text{キ}}$ であり，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\boxed{\text{ク}}$ である．

(6) $\displaystyle\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\frac{x\log\left(\log(x^2+1)\right)}{x^2+1}dx=\boxed{\text{ケ}}$

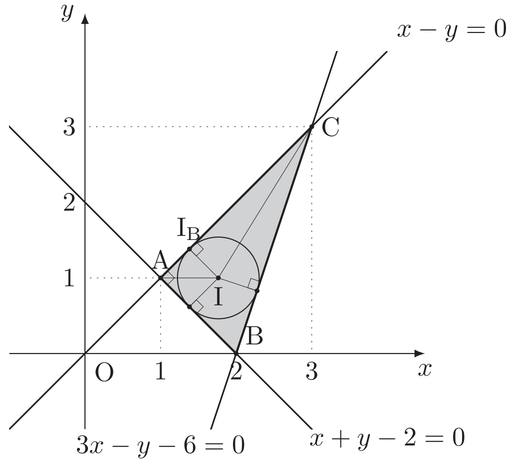
解答

ア．$4-\sqrt{5}$　イ．1　ウ．$2^4\cdot 3\cdot 17\cdot 19$　エ．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　オ．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　カ．$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$　キ．$\dfrac{4}{3}$

ク．$\dfrac{7}{2}$　ケ．$\dfrac{5}{4}\log 2-\dfrac{3}{4}$

解説

(1) 直線 $x-y=0$ と $x+y-2=0$ の交点を A，直線 $x+y-2=0$ と $3x-y-6=0$ の交点を B，直線 $3x-y-6=0$ と $x-y=0$ の交点を C，三角形 ABC に内接する円の中心を I (これを以下内心とよぶ)，I から辺 AC に下ろした垂線の足を $\mathrm{I_B}$ とおく．A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 0)$, C$(3,\ 3)$ である．$\angle$BAC の二等分線の方程式は明らかに $y=1$ であるから，I$(t,\ 1)$ とおける．このとき，I から 2 直線 AC, BC までの距離は等しいので，



$$\frac{|t-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3t-7|}{\sqrt{10}}$$

より，$\pm\sqrt{5}(t-1)=3t-7$ となるので，これを解いて $t=4\pm\sqrt{5}$ が得られる．内心は三角形の内部の点であるから，$t=4-\sqrt{5}$ が適する．したがって，求める座標は $\mathbf{I(4-\sqrt{5},\ 1)}$ である．

別解 1

三角形 ABC の内接円の半径を r とする．$\mathrm{AB}=\sqrt{2},\ \mathrm{BC}=\sqrt{10},\ \mathrm{CA}=2\sqrt{2}$ であるから，（直角）三角形 ABC の面積について

$$\frac{1}{2}r(\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$$

が成り立つので，これを解いて $r=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$ がわかる．ここで，三角形 $\mathrm{I_BAI}$ が直角二等辺三角形であることから，

$$\mathrm{AI}=\sqrt{2}r=3-\sqrt{5}$$

がわかるので，I の x 座標は $1+(3-\sqrt{5})=4-\sqrt{5}$ となる．したがって， $\mathbf{I(4-\sqrt{5},1)}$ である．

別解 2

一般に三角形 ABC において内心を I，$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ とおくと，任意の始点 O に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

が成り立つ．いまの場合，O を座標平面の原点とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OI}}&=\frac{\sqrt{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sqrt{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\sqrt{10}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{10}(1,\ 1)+2\sqrt{2}(2,\ 0)+\sqrt{2}(3,\ 3)}{3\sqrt{2}+\sqrt{10}}\\&=(4-\sqrt{5},\ 1)\end{aligned}$$

すなわち $\mathbf{I(4-\sqrt{5},\ 1)}$ である．

(2) $20!$ は 2 で $\left[\dfrac{20}{2}\right]+\left[\dfrac{20}{2^2}\right]+\left[\dfrac{20}{2^3}\right]+\left[\dfrac{20}{2^4}\right]=18$ 回， 3 で $\left[\dfrac{20}{3}\right]+\left[\dfrac{20}{3^2}\right]=8$ 回， 5 で $\left[\dfrac{20}{5}\right]=4$ 回， 7 で $\left[\dfrac{20}{7}\right]=2$ 回割り切れる．

$13!$ は 2 で $\left[\dfrac{13}{2}\right]+\left[\dfrac{13}{2^2}\right]+\left[\dfrac{13}{2^3}\right]=10$ 回， 3 で $\left[\dfrac{13}{3}\right]+\left[\dfrac{13}{3^2}\right]=5$ 回， 5 で $\left[\dfrac{13}{5}\right]=2$ 回， 7 で $\left[\dfrac{13}{7}\right]=1$ 回割り切れる．

20 以下の素数が 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 であることを考慮して ${}_{20}\mathrm{C}_7$ と $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^2}$ をそれぞれ素因数分解すると，

$$\begin{aligned}{}_{20}\mathrm{C}_7&=\frac{20!}{13!\cdot7!}\\&=\frac{2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}{(2^{10}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13)\cdot(2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7)}\\&=2^4\cdot3\cdot5\cdot17\cdot19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{20!}{2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^2}&=\frac{2^{18}\cdot3^8\cdot5^4\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}{2^{10}\cdot3^6\cdot5^4\cdot7^2}\\&=2^8\cdot3^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\end{aligned}$$

となる．

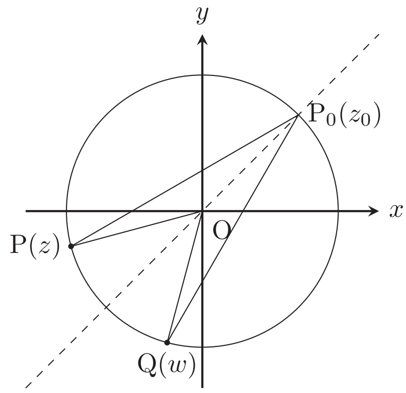
したがって，${}_{20}\mathrm{C}_7$ と $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2}$ の最大公約数は $\mathbf{2^4\cdot 3\cdot 17\cdot 19}$ である．

(3)　0, z, z_0, w を表す点をそれぞれ O, P, P_0, Q とおくと，

$$\angle\mathrm{POQ}=\arg\frac{w}{z}=\frac{17}{12}\pi-\frac{13}{12}\pi=\frac{\pi}{3}$$

である．よって，$\angle\mathrm{POQ}=2\angle\mathrm{PP_0Q}$ が成り立つので z_0 は単位円上にあることがわかる．また，$|z-z_0|=|w-z_0|$ であることから $\mathrm{P}_0(z_0)$ は $\mathrm{P}(z)$ と $\mathrm{Q}(w)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上に存在する．よって，

$z_0=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ である．



別解

$$\begin{aligned}
&w-z_0=(z-z_0)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
\iff&\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}-1\right)z_0=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z-w\\
&=\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)\\
&=\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\left\{1-\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
z_0&=-\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}
\end{aligned}$$

(4)　式変形の途中では $\tan x=X$, $\tan h=H$ と書くことにすると

$$\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{h\to0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{X+H}{1-XH}+\dfrac{X-H}{1+XH}-2X}{h^2}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(X+H)(1+XH)+(X-H)(1-XH)-2X(1-XH)(1+XH)}{h^2(1-XH)(1+XH)}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{(X+H+X^2H+XH^2)+(X-H-X^2H+XH^2)-(2X-2X^3H^2)}{h^2(1-XH)(1+XH)}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{2XH^2+2X^3H^2}{h^2(1-XH)(1+XH)}\\
&=\lim_{h\to0}\frac{\tan^2 h}{h^2}\cdot\frac{2\tan x+2\tan^3 x}{(1-\tan x\tan h)(1+\tan x\tan h)}\\
&=2\tan x+2\tan^3 x
\end{aligned}$$

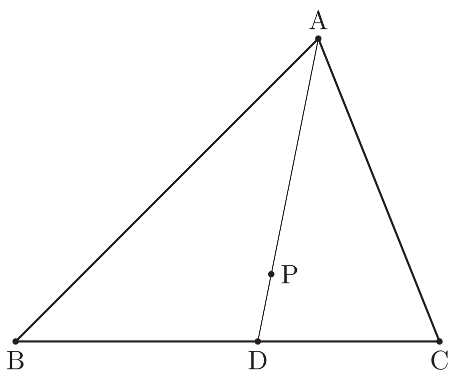
したがって $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{3}}{9}}$ である．

別解

記述答案であれば避ける方が無難であるが，穴埋め答案であればロピタルの定理を認めて使うのが圧倒的に速い．今の場合 $h\to 0$ のとき 分母 $\to 0$, 分子 $\to 0$ であるから分母，分子をそれぞれ h で微分する．(2 回繰り返す．)

$$\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2(x+h)}-\dfrac{1}{\cos^2(x-h)}}{2h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2\sin(x+h)}{\cos^3(x+h)}+\dfrac{2\sin(x-h)}{\cos^3(x-h)}}{2}\\
&=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}
\end{aligned}$$

(5)　始点をすべて A に揃えると，



$$\begin{aligned}
&2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+4\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\overrightarrow{0}\\
\iff&\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}\\
\iff&\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+4\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}\\
\iff&\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{AD}}
\end{aligned}$$

と表すことができるので，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$ である．

(6)　$t=\log(x^2+1)$ とおくと，$dt=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$ であり，

x と t の対応は右のようになる．

x	$\sqrt{\sqrt{e}-1}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{e^2-1}$
t	$\dfrac{1}{2}$	$\longrightarrow$	2

よって，

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\frac{x\log\left(\log(x^2+1)\right)}{x^2+1}dx&=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\log t\cdot\frac{dt}{2}\\
&=\frac{1}{2}\Big[t\log t-t\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}\\
&=\frac{1}{2}\left\{(2\log 2-2)-\left(-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\log 2-\frac{3}{2}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{5}{4}\log 2-\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

2

(1) (i) $x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，関数 $y = \dfrac{1}{1-x}$ は $x =$ [ア] で最大値 [イ] をとる．

(ii) $x > \dfrac{1}{3}$ のとき，関数 $y = \dfrac{5x-1}{x^2}$ は $x =$ [ウ] で最大値 [エ] をとる．

(2) u は実数，t は $0 < t < 1$ を満たすとする．空間の 3 点 P(1, 0, 0)，Q(u, 1, 0)，R(0, 0, 1) と平面 $H : x = t$ を考える．四面体 OPQR を H で切ったとき，切り口の面積を S，点 P を含む立体の体積を V，原点 O を含む立体の体積を W とする．

(i) $u \leqq \dfrac{1}{3}$ かつ $t = \dfrac{1}{3}$ とする．S は $u =$ [オ] のとき最大値 [カ] をとる．また，$3V = 2W$ を満たす u の値は $u =$ [キ] である．

(ii) $u > \dfrac{1}{3}$ かつ $0 < t \leqq \dfrac{1}{3}$ とする．H と線分 QR の交点の座標を u, t を用いて表すと，

([ク], [ケ], [コ]) である．

(iii) $u > \dfrac{1}{3}$ かつ $t = \dfrac{1}{3}$ とする．S は $u =$ [サ] のとき最大値 [シ] をとる．また，$V = W$ を満たす u の値は $u =$ [ス] である．

解答

ア．$\dfrac{1}{3}$　イ．$\dfrac{3}{2}$　ウ．$\dfrac{2}{5}$　エ．$\dfrac{25}{4}$　オ．$\dfrac{1}{3}$　カ．$\dfrac{1}{3}$　キ．$\dfrac{7}{27}$

ク．t　ケ．$\dfrac{t}{u}$　コ．$1-\dfrac{t}{u}$　サ．$\dfrac{2}{5}$　シ．$\dfrac{25}{72}$　ス．$\dfrac{8+\sqrt{10}}{27}$

解説

(1) (i) $x \leqq \dfrac{1}{3}$ において関数 $y = \dfrac{1}{1-x}$ は単調増加なので，$x = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$ のとき最大値 $\mathbf{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

(ii) $y = \dfrac{5x-1}{x^2}$ について $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-5x+2}{x^3}$ なので，$x > \dfrac{1}{3}$ におけるこの関数の増減は以下のようになる．

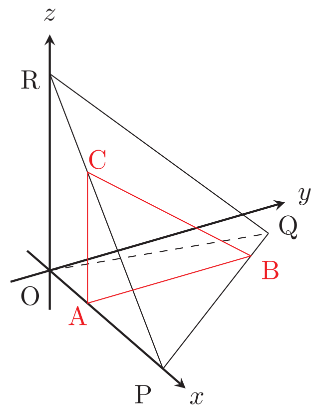
x	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\cdots$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$
$\dfrac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$		$\searrow$

したがって，$x = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$ のとき最大値 $\mathbf{\dfrac{25}{4}}$ をとる．

(2) x 軸，線分 PQ または OQ，線分 PR が平面 H と交わる点をそれぞれ A, B, C とする．直線 PQ の方程式は，$z = 0$ かつ $y = \dfrac{1}{u-1}(x-1)$ である．また，四面体 OPQR の体積すなわち $V + W$ は，

$$V + W = \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{OPQ} \cdot \mathrm{OR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

となり，Q の位置によらず一定である．



(i)　$u \leqq \frac{1}{3}$ かつ $t = \frac{1}{3}$ なので，S は △ABC の面積であり，

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3(1-u)},\ 0\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$$

である．よって

$$S = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3(1-u)}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1-u}$$

となる．よって，(1)(i) の結果を用いて，S は $u = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ をとるとわかる．

また，

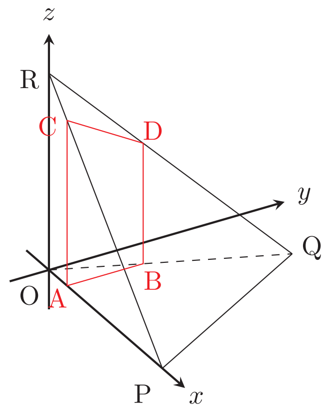
$$V = \frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{AP} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9(1-u)}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{81(1-u)}$$

であり，$3V = 2W$ のとき，

$$V + W = V + \frac{3}{2}V = \frac{5}{2}V \quad より \quad V = \frac{2}{5}(V+W) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

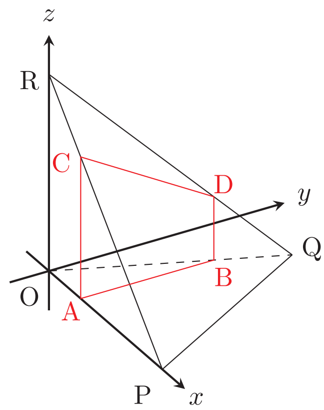
である．以上から，$\frac{4}{81(1-u)} = \frac{1}{15}$ を解いて，$u = \boldsymbol{\frac{7}{27}}$ となる．

(ii)　H と QR の交点を D とする．D, Q の x 座標がそれぞれ $x = t,\ u$ であることから，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{RD}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \frac{t}{u}\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\\ &= (0,\ 0,\ 1) + \frac{t}{u}(u,\ 1,\ -1)\\ &= \boldsymbol{\left(t,\ \frac{t}{u},\ 1-\frac{t}{u}\right)}\end{aligned}$$

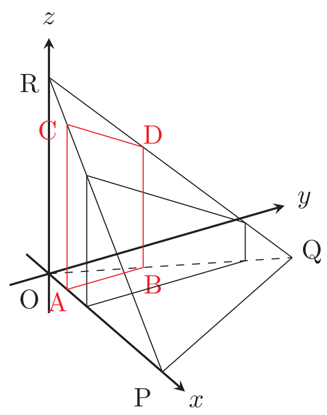
(iii)　$u > \frac{1}{3}$ かつ $t = \frac{1}{3}$ なので，S は台形 ABDC の面積であり，(2)(ii) の結果から $\mathrm{D}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3u},\ 1-\frac{1}{3u}\right)$ である．よって，



$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{AC}+\mathrm{BD})\cdot\mathrm{AB}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3u}\right)\cdot\frac{1}{3u}\\ &= \frac{1}{18}\cdot\frac{5u-1}{u^2}\end{aligned}$$

となる．よって，(1)(ii) の結果を用いて，S は $u = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$ のとき最大値 $\frac{1}{18}\cdot\frac{25}{4} = \boldsymbol{\frac{25}{72}}$ をとるとわかる．

改めて，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のときの H 上に A, B, C, D をとると，



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{AC} + \mathrm{BD}) \cdot \mathrm{AB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - t + 1 - \frac{t}{u}\right) \cdot \frac{t}{u} \\ &= \frac{1}{u}t - \frac{1}{2u}\left(1 + \frac{1}{u}\right)t^2 \end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{1}{3}} S dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{1}{u}t - \frac{1}{2u}\left(1 + \frac{1}{u}\right)t^2 \right\} dt \\ &= \left[\frac{1}{u} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2u}\left(1 + \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{8u - 1}{162u^2} \end{aligned}$$

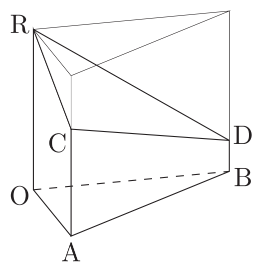
となる．$V = W$ であるとき $W = \dfrac{1}{12}$ であるから，

$$\frac{8u - 1}{162u^2} = \frac{1}{12} \iff 27u^2 - 16u + 2 = 0 \iff u = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{27}$$

となる．$u > \dfrac{1}{3}$ なので，$u = \boldsymbol{\dfrac{8 + \sqrt{10}}{27}}$ である．

別解

本解では定積分を用いて W を求めたが，「断頭三角柱の体積」の考え方を用いることもできる．



△OAB を底面とみなすと，立体 RCD-OAB は断頭三角柱であり，その体積は

(底面積) × (高さの平均)

で求めることができる．

底面積については，$\mathrm{OA} = \dfrac{1}{3}$，$\mathrm{AB} = \dfrac{1}{3u}$ から

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3u} = \frac{1}{18u}$$

である．

高さについては $\mathrm{OR} = 1$，$\mathrm{AC} = \dfrac{2}{3}$，$\mathrm{BD} = 1 - \dfrac{1}{3u}$ であるので，高さの平均は

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3u}\right) = \frac{8u - 1}{9u}$$

である．よって

$$W = \frac{1}{18u} \cdot \frac{8u - 1}{9u} = \frac{8u - 1}{162u^2}$$

3 関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots\ (x \geqq 0)$ を以下で定める．

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+2}, \qquad f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える．

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n} \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし， $a_1 = 3,\ b_1 = 2$ とする．

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $b_2 = \boxed{\text{イ}}$, $a_3 = \boxed{\text{ウ}}$, $b_3 = \boxed{\text{エ}}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす．

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ a_{n+2} = \boxed{\text{オ}}\,a_{n+1} + \boxed{\text{カ}}\,a_n \\ &\text{(b)}\ b_{n+2} = \boxed{\text{キ}}\,b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\,b_n \end{aligned} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(3) (2) の (a) は次のように変形できる．

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このときの $\alpha,\ \beta$ の値はそれぞれ， $\alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\beta = \boxed{\text{コ}}$ である．ただし， $\alpha > \beta$ とする．
$c_n = a_{n+1} - \alpha a_n\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\text{サ}}\,\beta^{n-1}$ である．
したがって， $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{シ}}\,\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ス}}\,\beta^{n-1}$$

である．また，$\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = \boxed{\text{セ}}\,\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ソ}}\,\beta^{n-1}$$

である．ただし， $\boxed{\text{サ}}$ 〜 $\boxed{\text{ソ}}$ は $\alpha,\ \beta$ を用いないで答えよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\text{タ}}$

解答

ア．7　イ．5　ウ．17　エ．12　オ．2　カ．1　キ．2　ク．1　ケ．$1+\sqrt{2}$　コ．$1-\sqrt{2}$
サ．$4-3\sqrt{2}$　シ．$\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$　ス．$\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$　セ．$1+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$　ソ．$1-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$　タ．$\sqrt{2}$

解説

(1) 定義より

$$f_2(x) = f_1\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{\dfrac{1}{x+2}+3}{\dfrac{1}{x+2}+2} = \frac{1+3(x+2)}{1+2(x+2)} = \frac{3x+7}{2x+5}$$

これが $\dfrac{a_1x+a_2}{b_1x+b_2}$ に等しいのであるが，$a_1=3,\ b_1=2$ だから $a_2=\mathbf{7},\ b_2=\mathbf{5}$ である．同様に

$$f_3(x)=f_2\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{3\dfrac{1}{x+2}+7}{2\dfrac{1}{x+2}+5}=\frac{3+7(x+2)}{2+5(x+2)}=\frac{7x+17}{5x+12}$$

これが $\dfrac{a_2x+a_3}{b_2x+b_3}$ に等しいのであるが，$a_2=7,\ b_2=5$ だから $a_3=\mathbf{17},\ b_3=\mathbf{12}$ である．

(2)　$a_1,\ \cdots,\ a_{n+1}, b_1,\ \cdots,\ b_{n+1}$ が矛盾なく定義されてしかもすべて正であると仮定する．関数漸化式より

$$\begin{aligned}f_{n+2}(x)&=f_{n+1}\left(\frac{1}{x+2}\right)\\&=\frac{a_n\dfrac{1}{x+2}+a_{n+1}}{b_n\dfrac{1}{x+2}+b_{n+1}}=\frac{a_n+a_{n+1}(x+2)}{b_n+b_{n+1}(x+2)}=\frac{a_{n+1}x+(2a_{n+1}+a_n)}{b_{n+1}x+(2b_{n+1}+b_n)}\end{aligned}$$

$f_{n+2}(x)=\dfrac{a_{n+1}x+a_{n+2}}{b_{n+1}x+b_{n+2}}$ より $a_{n+2}=\mathbf{2}a_{n+1}+\mathbf{1}a_n,\ b_{n+2}=\mathbf{2}b_{n+1}+\mathbf{1}b_n$ でなければならない．この場合 $a_{n+2}>0,\ b_{n+2}>0$ でもあるから，すべての自然数 n に対し $a_n,\ b_n$ はこの漸化式で矛盾なく一意に定義される．

(3)　漸化式 $a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ に関して $x^2=2x+1$ の解 $\alpha=\mathbf{1+\sqrt{2}},\ \beta=\mathbf{1-\sqrt{2}}$ を用いると

$$\begin{cases}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\\a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\end{cases}$$

が成り立つ．

$c_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ とおくと

$$c_n=\beta c_{n-1}=\cdots=\beta^{n-1}c_1=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}=(7-3(1+\sqrt{2}))\beta^{n-1}=\mathbf{(4-3\sqrt{2})}\beta^{n-1}$$

これより $a_{n+1}-\alpha a_n=(4-3\sqrt{2})\beta^{n-1}$ を得る．同様にして $a_{n+1}-\beta a_n=(4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1}$ も分かるので，辺々引くと

$$(\alpha-\beta)a_n=(4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(4-3\sqrt{2})\beta^{n-1}$$

整理して

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\alpha^{n-1}-\frac{4-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\beta^{n-1}\\&=\left(\mathbf{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\alpha^{n-1}+\left(\mathbf{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right)\beta^{n-1}\end{aligned}$$

同様にして

$$b_{n+1}-\alpha b_n=\beta^{n-1}(b_2-\alpha b_1)=(3-2\sqrt{2})\beta^{n-1}$$

$$b_{n+1}-\beta b_n=\alpha^{n-1}(b_2-\beta b_1)=(3+2\sqrt{2})\alpha^{n-1}$$

辺々引いて　$(\alpha-\beta)b_n=(3+2\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(3-2\sqrt{2})\beta^{n-1}$

整理して　$b_n=\left(\mathbf{1+\frac{3}{4}\sqrt{2}}\right)\alpha^{n-1}+\left(\mathbf{1-\frac{3}{4}\sqrt{2}}\right)\beta^{n-1}$

(4)　$f_n(x) = \dfrac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n}$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\alpha^{n-1} + \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\beta^{n-1}}{\left(1 + \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)\alpha^{n-1} + \left(1 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)\beta^{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right) + \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{\left(1 + \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right) + \left(1 - \dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}
\end{aligned}$$

ここで $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} = 0$ である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{\dfrac{3}{2} + \sqrt{2}}{1 + \dfrac{3}{4}\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合］((1) 標準 (2) 標準 (3) やや難 (4) 難 (5) 易 (6) 標準）難易度としては標準な問題でも，計算が面倒なため正解を導けた受験生は多くはないだろう．(3) では図形的な発想が必要であり，一筋縄ではいかない．

$\boxed{2}$［空間座標，数学Ⅲの微積分］（難）座標空間内で頂点の位置が変化する四面体を平面で 2 つに分割する問題．図形的なセンスの有無で差がつきそうではあるが，分量が多く，完答するのは困難だろう．(2) で最大値を求める際には (1) の結果が利用できる．

$\boxed{3}$［数列（関数の漸化式)］（やや難）誘導にしたがって計算していけばよいが，この手の処理に不慣れな受験生は多いかもしれない．(2) まで正解できれば，(3) 以降は数値がやや煩雑ではあるが処理自体は典型的である．

全体的に 2021 年度入試の 1 日目（2 月 2 日実施）より難度が高い．$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ で半分程度，$\boxed{3}$ を完答に近いところまで仕上げたい．目標は 60 % .