医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine 医学部専門予備校 英進館メビオ 福岡校

解答速報

東海大学医学部　数学

2021年 2月2日実施

1 (1)　自然数 a, b について等式 $(a+b\sqrt{3})^3 = 530+306\sqrt{3}$ が成り立つとき， $a=$ $\boxed{\text{ア}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　$\dfrac{611}{893}$ を既約分数で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　△OAB において，辺 OB を 7 : 3 に外分する点を C とする．s を正の実数とし，線分 AC を 2 : s に内分する点を P とするとき，線分 OP と辺 AB の交点 Q は OP を s : 1 に内分している． このときの s の値は $s=$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4)　r は正の定数とする．実数 x, y に関する条件 p, q を次で定める．

$$p:\ -5 \leqq x+y \leqq 5 \text{ かつ } -5 \leqq x-y \leqq 5$$

$$q: x^2+y^2-2x-4y+5 \leqq r^2$$

(i)　「p は q であるための必要条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(ii)　「p は q であるための十分条件である」ような正の定数 r の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5)　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

$a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$，$b_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n =$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

解答

ア．5　イ．3　ウ．$\dfrac{13}{19}$　エ．4　オ．$0<r\leqq\sqrt{2}$　カ．$r\geqq 5\sqrt{2}$　キ．3

解説

(1)　$(a+b\sqrt{3})^3 = a^3+3\sqrt{3}a^2b+9ab^2+3\sqrt{3}b^3$ より，

$$a^3+9ab^2+(3a^2b+3b^3)\sqrt{3} = 530+306\sqrt{3}$$

a, b は自然数，$\sqrt{3}$ は無理数であることから，

$$\begin{cases} a^3+9ab^2=530 \\ 3a^2b+3b^3=306 \end{cases} \iff \begin{cases} a(a^2+9b^2)=530 & \cdots ① \\ b(a^2+b^2)=102 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，a, b が自然数，$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$，$b < a^2 + b^2$ に注意すると，

b	1	2	3	6
a^2+b^2	102	51	34	17

$\longrightarrow$

b	1	2	3	6
a^2	101	47	25	-19

よって，a, b がともに自然数となるものは，$(a,\ b) = (5, 3)$ のみであり，これは ① も満たしている．よって，$a = \mathbf{5}$, $b = \mathbf{3}$.

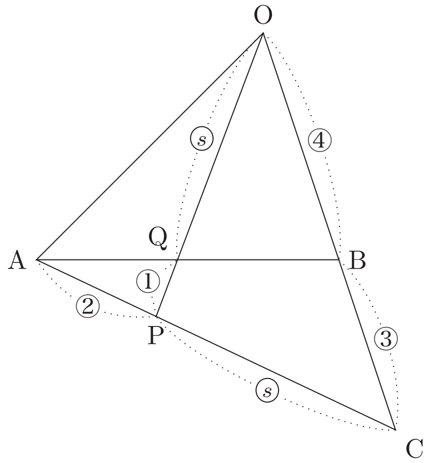
(2)　2 つの自然数 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ と表すことにすると，互除法により，

$$\begin{aligned}\gcd(611, 893) &= \gcd(611, 282)\\ &= \gcd(47, 282)\\ &= 47\end{aligned}$$

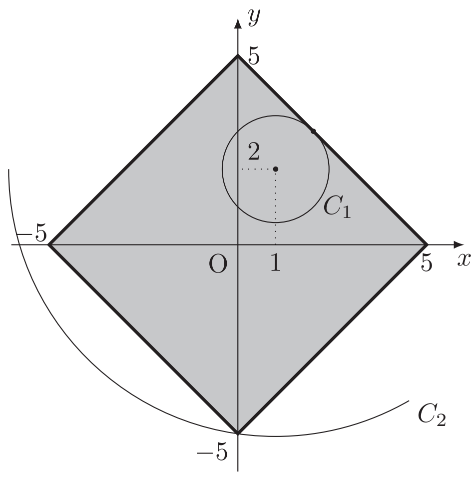
であるから， 611 と 893 はともに 47 で割り切れる．したがって，$\dfrac{611}{893} = \dfrac{47 \cdot 13}{47 \cdot 19} = \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{19}}$.

(3)　メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BC}} \cdot \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AP}} \cdot \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QO}} = 1 \iff \frac{4}{3} \cdot \frac{s+2}{2} \cdot \frac{1}{s} = 1 \iff s = \mathbf{4}$$



(4)　条件 p で与えられた領域を D とすると，領域 D は図の灰色部分（境界を含む）となる．また，条件 q で与えられた領域を E とすると，与えられた不等式は $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqq r^2$ であるから，領域 E は，中心 $(1,\ 2)$ ，半径 r の円の周および内部を表す．



(i)　p が q であるための必要条件となるためには，領域 D の周および内部に領域 E が含まれればよいので，点 $(1,\ 2)$ と直線 $x + y - 5 = 0$ の距離が半径以上となればよい．

$$\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1+1}} \geqq r \iff r \leqq \sqrt{2}$$

$r > 0$ より，$\boldsymbol{0 < r \leqq \sqrt{2}}$.

(ii)　p が q であるための十分条件となるためには，領域 E の周および内部に領域 D が含まれればよいので，条件 p を満たす点 $(x,\ y)$ のうち点 $(1,\ 2)$ から最も遠い点 $(0, -5)$ が，$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqq r^2$ を満たせばよい．

$$1 + 49 \leqq r^2 \iff r \leqq -5\sqrt{2},\ 5\sqrt{2} \leqq r$$

$r > 0$ より，$\boldsymbol{r \geqq 5\sqrt{2}}$.

(5)

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{3^{n-k-1}} \\
&= \frac{1}{3^{n-2}} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{3^{n-2}} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\
&= \frac{6}{3^{n-1}} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\} \\
&= 6 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{n=2}^{\infty} c_n = 6 \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \mathbf{3}
$$

2 本問において複素数を解答欄に書くときは，極形式を用いないで答えよ．

等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす複素数のうち，虚部が正であるものを α とするとき， $\alpha=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(1) $p,\ q$ を実数とする．方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす p と q の組の中で，q の値が最大となる組は $p=$ $\boxed{\text{イ}}$，$q=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．また，方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+iq|=1$ を満たす p と q の組の中で，q の値が最大となる組は $p=$ $\boxed{\text{エ}}$，$q=$ $\boxed{\text{オ}}$ である．

(2) 次の 2 つの条件を満たす複素数 p と q の組を考える．

(a) $|q|=1$ かつ αq は実数である．

(b) $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$

このような p と q の組の中で p の実部が負，虚部が正であるものは $p=$ $\boxed{\text{カ}}$，$q=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

(3) p を複素数，q を絶対値が 1，偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ の複素数とする．方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす点 p は，点 $\boxed{\text{ク}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{ケ}}$ の円を描く．また，方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+\overline{\alpha}q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$ を満たす複素数 p は $p=$ $\boxed{\text{コ}}$ である．

解答

ア．$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　イ．$-\sqrt{3}$　ウ．2　エ．0　オ．1　カ．$\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}$　キ．$\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$　ク．$-i$

ケ．1　コ．$\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{2}$

解説

$z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3} \iff z^2-\sqrt{3}z+1=0 \iff z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

α の虚部は正であるので，$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}$

(1) $p+\alpha q=p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q+\dfrac{q}{2}i$ であるので，$|p+\alpha q|=\left|p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q+\dfrac{q}{2}i\right|=\sqrt{\left(p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2+\dfrac{1}{4}q^2}=1$

q が最大となるのは，$p=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}q$ のときであり，このとき $q=2$ である．よって $p=\boldsymbol{-\sqrt{3}}$，$q=\boldsymbol{2}$ である．

$|p+\alpha q|=1 \iff \left(p+\dfrac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2+\dfrac{1}{4}q^2=1\cdots$①

$|p+iq|=1 \iff p^2+q^2=1\cdots$②

①，② を連立することにより，q の値が最大となる組は $p=\boldsymbol{0}$，$q=\boldsymbol{1}$ である．

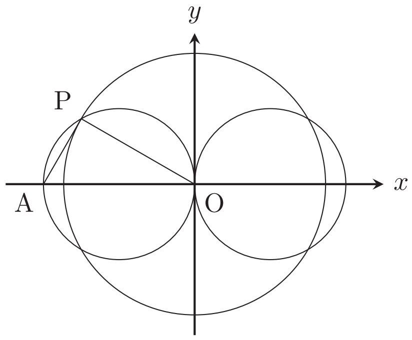
(2) $|\alpha|=1$ と 条件 (a) より $\alpha q=\pm1$．これと条件 (b) より，p の満たす条件は，

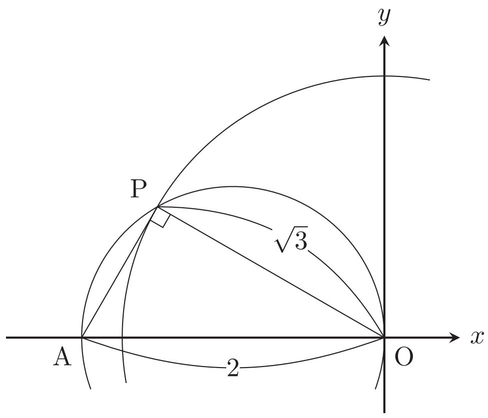
$$\begin{cases}|p+1|=1 \text{ または } |p-1|=1\\|p|=\sqrt{3}\end{cases}$$

であり，「中心 -1 で半径 1 の円周，または中心 -1 で半径が 1 の円周」と「中心 0 で半径 $\sqrt{3}$ の円周」の交点である．p の実部が負，虚部が正であるものは下左図の P である．

ここで，O(0)，A(-2) とおくと，OA $=2$，OP $=\sqrt{3}$，$\angle$APO $=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\angle$POA $=\dfrac{\pi}{6}$ である．したがって，

$p=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}}$ であり，このとき $\alpha q=1$ より $q=\dfrac{1}{\alpha}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$ である．





$\boxed{\text{別解}}$

条件より，$|q|=1\cdots③$，$|p|=\sqrt{3}\cdots④$ また，αq は実数であるので，$\alpha q=\overline{\alpha}\,\overline{q}\cdots⑤$

$|p+\alpha q|=1$ より，

$|p+\alpha q|^2=(p+\alpha q)(\overline{p}+\overline{\alpha}\,\overline{q})=|p|^2+p\overline{\alpha}\,\overline{q}+\overline{p}\alpha q+|\alpha|^2|q|^2=4+(p+\overline{p})\alpha q=1$ （③④⑤を用いた）

よって，$q=-\dfrac{3}{(p+\overline{p})\alpha}=-\dfrac{3}{p+\overline{p}}\overline{\alpha}$

ここで，$p+\overline{p}$ は実数，p の実部が負，虚部が正，$|q|=1$ であることから，$-\dfrac{3}{p+\overline{p}}=1$，$q=\overline{\alpha}$

よって，$p=\boldsymbol{\dfrac{-3+\sqrt{3}i}{2}}$，$q=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$

(3) $q=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha q=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}=i$

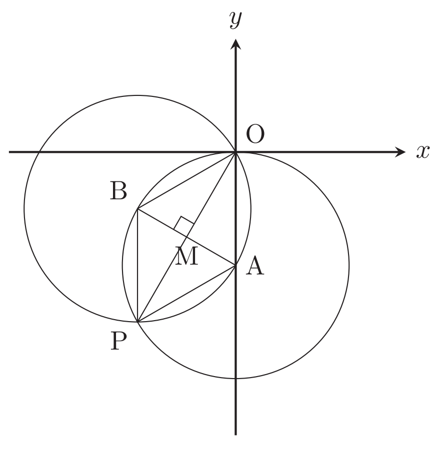
$\overline{\alpha}q=\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}+i\sin\dfrac{-\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

であるので，$|p+\alpha q|=1$ は中心 $\boldsymbol{-i}$，半径 **1** の円を表す．

同様に，$|p+\overline{\alpha}q|=1$ は中心 $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，半径 1 の円である．この 2 円の中心をそれぞれ A，B とおき，原点を O，2 円の交点の O 以外の点を P とおくと，三角形 OAB と三角形 PAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形になっている．したがって $\mathrm{OP}=\sqrt{3}$ となり，P を表す複素数は

$$|p+\alpha q|=1 \text{ かつ } |p+\overline{\alpha}q|=1 \text{ かつ } |p|=\sqrt{3}$$

を満たす p である．よって，$p=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)=\boldsymbol{\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{2}}$ である．



$\boxed{3}$ 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において定義された 2 つの関数 $f(x),\ g(x)$ に対して

$$I_n(f(x),\ g(x)) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．

(1) $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$ のとき，

$$\begin{aligned} I_n(x^2,\ x^3) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(\boxed{\text{ア}}k^4 + \boxed{\text{イ}}k^3 + \boxed{\text{ウ}}k^2) \end{aligned}$$

と表されるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ x^3) = \boxed{\text{エ}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(\sin\pi x,\ x^2) = \boxed{\text{オ}}$

(3) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において，次の 3 つの関数 $h_1(x),\ h_2(x),\ h_3(x)$ を考える．

$$h_1(x) = x - x^2, \qquad h_2(x) = 1 - e^{-x}, \qquad h_3(x) = x$$

(i) $h_1(x) - h_2(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ii) $h_2(x) - h_3(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ク}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(iii) $I_n(x^2,\ e^x)$ を $h_2(x)$ を用いて表すと，

$$I_n(x^2,\ e^x) = \sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{コ}}\,h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である．

(i)，(ii)，(iii) を利用すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x) = \boxed{\text{サ}}$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\{I_n(x^2,\ e^x) + I_n(e^x,\ x^2)\} = \boxed{\text{シ}}$$

解答

ア．3　イ．-3　ウ．1　エ．$\dfrac{3}{5}$　オ．$\dfrac{2}{\pi}$　カ．0　キ．$-1+\dfrac{1}{e}$　ク．0　ケ．$-\dfrac{1}{e}$

コ．$\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 e^{\frac{k}{n}}$　サ．$e-2$　シ．e

解説

(1)

$$\begin{aligned} I_n(x^2,\ x^3) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3\right\} \\ &= \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{3}k^4 + (\mathbf{-3})\cdot k^3 + \mathbf{1}\cdot k^2) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ x^3) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{k}{n}\right)^4 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= \int_0^1 3x^4\,dx - 0\cdot\int_0^1 3x^3\,dx + 0\cdot\int_0^1 x^2\,dx \\ &= \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

である．

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n(\sin\pi x,\ x^2) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n}\pi\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{n}\sin\frac{k}{n}\pi \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}\sin\frac{k}{n}\pi - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi \\ &= \int_0^1 2x\sin\pi x\,dx - 0\cdot\int_0^1 \sin\pi x\,dx \\ &= 2\left\{\left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 + \int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{\pi} + \left[\frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right]_0^1\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

(3) (i) $p(x) = h_1(x) - h_2(x) = x - x^2 - 1 + e^{-x}$ とおくと，

$$p'(x) = 1 - 2x - e^{-x},\ p''(x) = -2 + e^{-x}$$

である．ここで，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ においては $\dfrac{1}{e} \leqq e^{-x} \leqq 1$ であることから $p''(x) < 0$ がわかるので $p'(x)$ は単調減少である．これと $p'(0) = 0$ より $p'(x) \leqq 0$ がわかるので $p(x)$ も単調減少である．したがって，$h_1(x) - h_2(x)$ の最大値は $p(0) = \mathbf{0}$，最小値は $p(1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{e} - 1}$ である．

(ii) $q(x) = h_2(x) - h_3(x)$ とおくと，$q'(x) = e^{-x} - 1 \leqq 0$ より $q(x)$ は単調減少であるので，$h_2(x) - h_3(x)$ の最大値は $q(0) = \mathbf{0}$，最小値は $q(1) = \boldsymbol{-\dfrac{1}{e}}$ である．

(iii)

$$\begin{aligned}I_n(x^2,\ e^x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(e^{\frac{k}{n}} - e^{\frac{k-1}{n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2(1 - e^{-\frac{1}{n}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2}h_2\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

である．ここで，(i)，(ii) の議論から区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において

$$h_1(x) \leqq h_2(x) \leqq h_3(x)$$

が成り立つので，n が自然数のとき，$0 \leqq \dfrac{1}{n} \leqq 1$ であることから

$$h_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq h_2\left(\frac{1}{n}\right) \leqq h_3\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ．したがって，

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 h_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 h_2\left(\frac{1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 h_3\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 h_2\left(\frac{1}{n}\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \\
&= \int_0^1 x^2 e^x\,dx - 0\cdot\int_0^1 x^2 e^x\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 e^x\,dx
\end{aligned}$$

であり，また，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2 h_2\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \int_0^1 x^2 e^x\,dx \\
&= \left[(x^2-2x+2)e^x\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{e-2}
\end{aligned}$$

となる．次に，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n(e^x,\ x^2) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}\\&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{2k-1}{n}\\&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n}e^{\frac{k}{n}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\\&= \int_0^1 2xe^x\,dx-0\cdot\int_0^1 e^x\,dx\\&= 2\int_0^1 xe^x\,dx\\&= 2[(x-1)e^x]_0^1\\&= 2\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\{I_n(x^2,\ e^x)+I_n(e^x,\ x^2)\}=(e-2)+2=\boldsymbol{e}$$

である．

$\boxed{\text{別解}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x)$ については，(i)，(ii) の誘導に乗らずに次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)\\&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2(1-e^{-\frac{1}{n}})\\&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{e^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}}\\&= \int_0^1 x^2e^x\,dx\quad \left(\text{ここで，}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\ \text{であることを利用した}\right)\\&= \cdots(\text{以下同様})\end{aligned}$$

補足：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_n(f(x),\ g(x)) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\\&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\\&= \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

であるから，本問の極限はそれぞれ以下のようにただちに定積分に変換できる．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x^2,\ x^3)=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2\,dx=\int_0^1 3x^4\,dx$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} I_n(\sin \pi x,\ x^2) = \int_0^1 \sin \pi x \cdot 2x\, dx$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} I_n(x^2,\ e^x) = \int_0^1 x^2 e^x\, dx$

$f(x) = x^2,\ g(x) = e^x$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \{I_n(x^2,\ e^x) + I_n(e^x,\ x^2)\} &= \lim_{n\to\infty} \{I_n(f(x),\ g(x)) + I_n(g(x),\ f(x))\} \\
&= \int_0^1 f(x) g'(x)\, dx + \int_0^1 g(x) f'(x)\, dx \\
&= \int_0^1 (f(x)g(x))'\, dx \\
&= \left[f(x)g(x)\right]_0^1 \\
&= \left[x^2 e^x\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

講評

$\boxed{1}$［小問集合］（標準）標準的な問題が並んだ．できれば取りこぼしたくないが，分量は多めなので要領よく乗り切りたい．

$\boxed{2}$［複素数平面］（標準〜やや難）中身はごく標準的な問題なのだが，与えられる条件が多いために題意をとるのに戸惑った受験生もいるだろう．差がつきそうな問題である．

$\boxed{3}$［数学Ⅲの微積分］（やや難）「区分求積」と「積分と不等式」の融合問題．誘導は丁寧だが，難易度は高く時間内に完答するのは難しいだろう．なお，枠サについては (i)〜(iii) の誘導を利用しなくても結果は出せる．

やや難しい問題が含まれるが，そこを飛ばしても次の設問が解ける場合がある．それらをしっかり拾えるかどうかで差がつくだろう．目標は 70% ．