解答速報

久留米大学医学部（後期）　数学

2021年 3月8日実施

1.　$a,\ b$ を実数の定数とする。4 次方程式 $x^4+ax^3+ax^2+(6-a)x+b=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x=1+\sqrt{3}i$ を解にもつとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イウ}}$ であり，このときの 4 次方程式の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{エ}}$ 個である。

(2)　$a=3,\ b=1$ のとき，4 次方程式の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，虚数解の個数は $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

解答

解答記号	正解
ア	2
イウ	24
エ	0
オ	2
カ	2

解説

(1)　実数係数の x の整方程式が虚数解 α を持つ場合，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解に持つ．したがって本問の場合，与えられた 4 次方程式の左辺は $\left(x-1-\sqrt{3}i\right)\left(x-1+\sqrt{3}i\right)=x^2-2x+4$ で割り切れることになる．実際に割ってみると

$$x^4+ax^3+ax^2+(6-a)x+b=(x^2-2x+4)\{x^2+(a+2)x+3a\}+(-2+a)x+(b-12a)$$

となるので，この余りの部分 $(-2+a)x+(b-12a)$ が式として 0 でなければならない．したがって，$-2+a=0$ かつ $b-12a=0$ を解いて $a=\mathbf{2},\ b=\mathbf{24}$ を得る．

このとき代入しなおすと

$$x^4+ax^3+ax^2+(6-a)x+b=x^4+2x^3+2x^2+4x+24=(x^2-2x+4)(x^2+4x+6)$$

となり，$x^2+4x+6=0$ の判別式 D_1 は $\dfrac{D_1}{4}=4-6<0$ なので，この 4 次方程式の異なる実数解の個数は $\mathbf{0}$ 個である．

別解

$x=1+\sqrt{3}i$ のとき $x^3=-8$ である．これを使うと次数下げが楽にできる．

(2)　$a=3,\ b=1$ を代入すると 4 次方程式は $x^4+3x^3+3x^2+3x+1=0$ となる．（相反方程式になる．）この方程式は次のように解くことが出来る．

$x=0$ は解ではないので x^2 で割り，$x+\dfrac{1}{x}$ の方程式に書き直す．

$$
\begin{aligned}
&x^4+3x^3+3x^2+3x+1=0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2+3x+3+3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0
\end{aligned}
$$

$x+\dfrac{1}{x}$ の 2 次方程式とみて解の公式で解くと

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ は $2x^2-(-3+\sqrt{5})x+2=0$ と変形されるが，この 2 次方程式の判別式 D_2 は $D_2=(-3+\sqrt{5})^2-16=-2-6\sqrt{5}<0$ なので，2 つの虚数解を持つ．

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ は $2x^2+(3+\sqrt{5})x+2=0$ と変形されるが，この 2 次方程式の判別式 D_3 は $D_3=(3+\sqrt{5})^2-16=-2+6\sqrt{5}>0$ なので，異なる 2 つの実数解を持つ．

したがって 4 次方程式の異なる実数解の個数は **2** 個であり，虚数解の個数は **2** 個である．

2. 下の表はあるクラスの 10 人の数学のテストの点数の結果であり，出席番号が i 番の生徒のデータを x_i ($i=1, 2, 3, \cdots, 10$) とする。以下，小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで 0 をマークすること。

出席番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得点	75	84	69	73	92	87	81	75	91	83

(1) テストの点数の中央値は $\boxed{キク}.\boxed{ケ}$ であり，平均値は $\boxed{コサ}.\boxed{シ}$ である。

(2) k を実数の定数とするとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(x_i-k)^2$ を最小にする k の値は $k=\boxed{スセ}$ であり，そのときの最小値は $\boxed{ソタチ}$ である。

(3) このテストを欠席していた生徒が 2 名いた。この 2 名が後日テストを受け，2 名の点数を加えたところ平均値は変わらず，分散は 1 だけ減った。このとき，欠席していた 2 名の生徒の点数は $\boxed{ツテ}$ 点と $\boxed{トナ}$ 点である。ただし，$\boxed{ツテ} < \boxed{トナ}$ とする。

解答

解答記号	正解
キク.ケ	82.0
コサ.シ	81.0
スセ	81
ソタチ	550
ツテ	74
トナ	88

解説

(1) 10 人の成績をデータの小さい順に並べると

$$69,\ 73,\ 75,\ 75,\ \underbrace{81,\ 83}_{5\text{ 番目と }6\text{ 番目のデータ}},\ 84,\ 87,\ 91,\ 92$$

となるので，テストの点数の中央値は $\dfrac{81+83}{2}=\mathbf{82.0}$ である．また，仮平均を 80 とすると，平均値は

$$80+\frac{(-5)+4+(-11)+(-7)+12+7+1+(-5)+11+3}{10}=\mathbf{81.0}$$

である．

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(x_i-k)^2&=\sum_{i=1}^{10}\left(x_i{}^2-2kx_i+k^2\right)\\&=10k^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})k+\left(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2\right)\\&=10\left(k-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}\right)^2+\left(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2\right)-\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_{10})^2}{10}\end{aligned}$$

であるから，$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(x_i-k)^2$ が最小となるのは $k=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10}=\mathbf{81}$ のときである．また，このとき最小値は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}(x_i-81)^2&=(-6)^2+3^2+(-12)^2+(-8)^2+11^2+6^2+0^2+(-6)^2+10^2+2^2\\&=\mathbf{550}\end{aligned}$$

である．

(3) (2) の議論より，最初にテストを受けた 10 人の分散は $\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(x_i-81)^2=55$ であるから，後からテストを受けた 2 名の点数を合わせた 12 人の点数の分散は 54 となることがわかる．ここで，12 人の点数を変量 x，平均点を m と書くことにすると，平均点は変わらないので $m=81$ であり，後日テストを受けた生徒の点数は $x_{11}=81-a$，$x_{12}=81+a$ $(a\geqq 0)$ とおける．したがって，次のような表を得る．

x	$x-m$	$(x-m)^2$
x_1	x_1-81	$(x_1-81)^2$
x_2	x_2-81	$(x_2-81)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{10}	$x_{10}-81$	$(x_{10}-81)^2$
x_{11}	$-a$	a^2
x_{12}	a	a^2
平均	0	$\dfrac{1}{12}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(x_i-81)^2+2a^2\right\}$

この表の右下は 12 名の点数の分散を表していて，それが 54 であるから，

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\left\{\sum_{i=1}^{10}(x_i-81)^2+2a^2\right\}=54 &\iff \frac{1}{12}(550+2a^2)=54\\&\iff a^2=49\end{aligned}$$

となる．$a\geqq 0$ より $a=7$ であるから，求める 2 名の生徒の点数は小さい順に **74** 点と **88** 点である．

3. 座標平面上の 2 点 $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が $2\sqrt{3}$ である楕円を C とする。

(1) 楕円 C の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とするとき，$a^2=\boxed{\text{ニ}}$，$b^2=\boxed{\text{ヌ}}$ である。

(2) 点 P が楕円 C 上を動くとき, 点 P と直線 $2x-y-9=0$ の距離の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}+\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}$

であり，このときの点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ヘホ}}\sqrt{\boxed{\text{マミ}}}}{\boxed{\text{ムメ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{モヤ}}}}{\boxed{\text{ユヨ}}}\right)$ である。

(3) 楕円 C を原点のまわりに 90° 回転した楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{d^2}=1$ とするとき，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ かつ

$\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{d^2}\leqq 1$ を満たす領域の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ラ}}\sqrt{\boxed{\text{リ}}}}{\boxed{\text{ル}}}\pi$ である。

解答

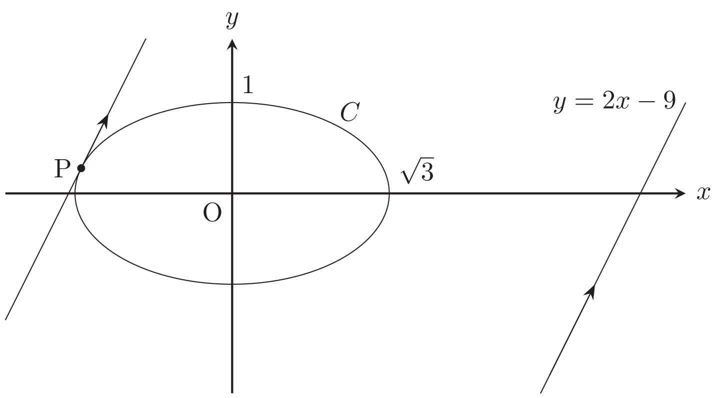
解答記号	正解
ニ	3
ヌ	1
$\dfrac{\sqrt{\text{ネノ}}+\text{ハ}\sqrt{\text{ヒ}}}{\text{フ}}$	$\dfrac{\sqrt{65}+9\sqrt{5}}{5}$
$\left(\dfrac{\text{ヘホ}\sqrt{\text{マミ}}}{\text{ムメ}},\ \dfrac{\sqrt{\text{モヤ}}}{\text{ユヨ}}\right)$	$\left(\dfrac{-6\sqrt{13}}{13},\ \dfrac{\sqrt{13}}{13}\right)$
$\dfrac{\text{ラ}\sqrt{\text{リ}}}{\text{ル}}\pi$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

解説

(1) 楕円の焦点が x 軸上にあるので，楕円の長軸の長さは $2|a|$ である．楕円の定義より，2 焦点からの距離の和が長軸の長さに等しいので，$2|a|=2\sqrt{3}$．これより $a^2=\mathbf{3}$ である．

また，焦点の座標より，$\sqrt{2}=\sqrt{a^2-b^2}$．よって $b^2=\mathbf{1}$ である．

(2) 点 P と直線 $2x-y-9=0$ の距離が最大になるのは，点 P が第 2 象限にあり，かつ点 P における接線が直線 $2x-y-9=0$ と平行になるときである．



(1) より，楕円 C の方程式は $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ となるので，この両辺を x で微分すると，

$$\frac{2}{3}x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)\ (x_1<0,\ y_1>0)$ とおくと, 点 P における接線の傾きは $-\dfrac{x_1}{3y_1}$ と表せるので,

$$\begin{cases} -\dfrac{x_1}{3y_1}=2 \\ \dfrac{{x_1}^2}{3}+{y_1}^2=1 \end{cases}$$

これらと $x_1<0,\ y_1>0$ より，$x_1=-\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$，$y_1=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ と求まる.

したがって，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{-6\sqrt{13}}{13}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{13}}\right)$ であり，このときの点 P と直線 $2x-y-9=0$ の距離を d とおくと，

$$d=\frac{\left|2\left(-\dfrac{6\sqrt{13}}{13}\right)-\dfrac{\sqrt{13}}{13}-9\right|}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}+9\sqrt{5}}{5}}$$

別解

点 P の座標を $(x,\ y)=(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおき，点 P と直線 $2x-y-9=0$ の距離を d とおくと，

$$d=\frac{|2\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta-9|}{\sqrt{5}}=\frac{|\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)-9|}{\sqrt{5}}$$

と表される．ただし，α は $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ を満たす角である.

d が最大になるのは $\sin(\theta+\alpha)=-1$ となるときであり，d の最大値は

$$\frac{\sqrt{13}+9}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}+9\sqrt{5}}{5}}$$

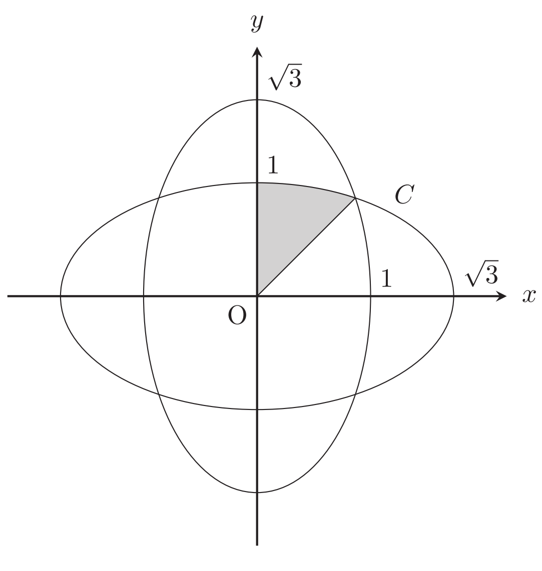
また，このとき $\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi+2n\pi$ （n は整数）となるので,

$$x=\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{3}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha+2n\pi\right)=-\sqrt{3}\sin\alpha=\frac{-6\sqrt{13}}{13}$$

$$y=\sin\theta=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha+2n\pi\right)=-\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

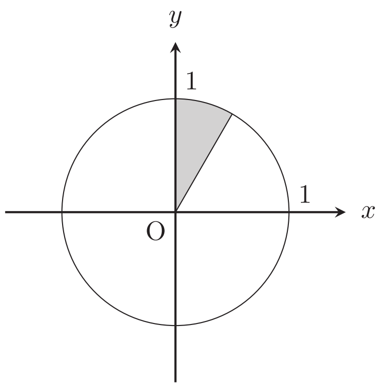
したがって，$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{-6\sqrt{13}}{13}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{13}}{13}}\right)$ である.

(3) 図形の対称性より，求める領域の面積は楕円 C，直線 $y=x$，y 軸の 3 つで囲まれた領域のうち，$y\geqq 0$ である領域（右図の灰色部分．これを D とおく）の面積を 8 倍したものに等しい.



そこで D を x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍した領域を考える．

その領域は単位円と直線 $y=\sqrt{3}x$，y 軸の 3 つで囲まれた領域のうち，$y \geqq 0$ である領域（右図の灰色部分）となり，この面積は，中心角が $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の面積に等しいので，$\dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$．



ゆえに求める面積を S とすると，

$$S = \frac{\pi}{12} \times \sqrt{3} \times 8 = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$

4. 1 から 25 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 25 個の球が箱に入っている。次の問いに答えよ。ただし，以下でいう取り出された球に書かれた数字の和とは，例えば，1 と 8 と 14 と 20 が書かれた球が取り出されたとき $1+8+14+20=43$ である。

(1) この箱の中から 2 個の球を取り出すとき，取り出された 2 個の球に書かれた数字の和が偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{あい}}}{\boxed{\text{うえ}}}$ である。

(2) この箱の中から 2 個の球を取り出すとき，取り出された 2 個の球に書かれた数字の和が 5 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{お}}}{\boxed{\text{か}}}$ である。

(3) この箱の中から 22 個の球を取り出すとき，取り出された 22 個の球に書かれた数字の和が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{きくけ}}}{\boxed{\text{こさし}}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{あい}}{\text{うえ}}$	$\dfrac{12}{25}$
$\dfrac{\text{お}}{\text{か}}$	$\dfrac{1}{5}$
$\dfrac{\text{きくけ}}{\text{こさし}}$	$\dfrac{191}{575}$

解説

(1) 25 個の球から 2 個取り出す場合の数は，${}_{25}\mathrm{C}_2=300$ 通り．

取り出された 2 個の球に書かれた数字の和が偶数となるのは，次のいずれかの場合である．

(i) 2 個とも偶数を取り出す．このとき，取り出し方は ${}_{12}\mathrm{C}_2=66$ 通り．

(ii) 2 個とも奇数を取り出す．このとき，取り出し方は ${}_{13}\mathrm{C}_2=78$ 通り．

よって，求める確率は，

$$\frac{66+78}{300}=\mathbf{\frac{12}{25}}$$

(2) 1 から 25 までの数を 5 で割った余りで次のように分ける．

$$\begin{aligned}R_0&=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}\\R_1&=\{1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21\}\\R_2&=\{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22\}\\R_3&=\{3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23\}\\R_4&=\{4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24\}\end{aligned}$$

取り出された 2 個の数字の和が 5 の倍数になるのは，次のいずれかの場合である．

(i) R_0 から 2 個を取り出す．このとき，${}_5\mathrm{C}_2=10$ 通り．

(ii) R_1 から 1 個，R_4 から 1 個取り出す．このとき，${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1=25$ 通り．

(iii) R_2 から 1 個，R_3 から 1 個取り出す．このとき，${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1=25$ 通り．

よって，求める確率は，

$$\frac{10+25+25}{300}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

(3)　1 から 25 のすべての整数の和は,

$$\sum_{k=1}^{25} k = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 325$$

であり，$325 \equiv 1 \pmod 3$ であることから，求める確率は,「箱の中から 22 個の球を取り出すとき，残った 3 個の球に書かれた数字の和を 3 で割った余りが 1 になる確率」と一致する.

25 個の球から 22 個取り出す場合の数は，${}_{25}\mathrm{C}_{22} = {}_{25}\mathrm{C}_3 = 2300$ 通り.

1 から 25 までの数を 3 で割った余りで次のように分ける.

$$S_0 = \{3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 24\} \quad \cdots \quad 8 \text{ 個}$$
$$S_1 = \{1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 25\} \quad \cdots \quad 9 \text{ 個}$$
$$S_2 = \{2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 23\} \quad \cdots \quad 8 \text{ 個}$$

残った 3 個の数字の和を 3 で割って 1 余るのは，次のいずれかの場合である.

(i)　S_0 に 2 個，S_1 に 1 個残る．このとき，${}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_9\mathrm{C}_1 = 252$ 通り.

(ii)　S_0 に 1 個，S_2 に 2 個残る．このとき，${}_8\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 = 224$ 通り.

(iii)　S_1 に 2 個，S_2 に 1 個残る．このとき，${}_9\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_1 = 288$ 通り.

よって，求める確率は,

$$\frac{252 + 224 + 288}{2300} = \boldsymbol{\frac{191}{575}}$$

5. 座標空間において，点 $(4,\ 0,\ -5)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{\ell}=(1,\ 1,\ -3)$ に平行な直線を ℓ，点 $(3,\ 2,\ -4)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{m}=(-2,\ 1,\ 4)$ に平行な直線を m，点 $(2,\ 1,\ -2)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線を n とする。

(1) 直線 ℓ と直線 m が交点をもつとき，その交点の座標は $\left(\boxed{\text{す}},\ \boxed{\text{せ}},\ \boxed{\text{そた}}\right)$ である。

(2) 点 $(8,\ -3,\ 5)$ から直線 n に引いた垂線と，直線 n との交点の座標は $\left(\boxed{\text{ち}},\ \boxed{\text{つて}},\ \boxed{\text{と}}\right)$ である。

解答

解答記号	正解
(す，せ，そた)	(5，1，−8)
(ち，つて，と)	(2，−5，1)

解説

直線 $\ell,\ m,\ n$ 上の点をそれぞれ P, Q, R とすると，実数 $s,\ t,\ u$ を用いてそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 0,\ -5)+s(1,\ 1,\ -3)=(4+s,\ s,\ -5-3s)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3,\ 2,\ -4)+t(-2,\ 1,\ 4)=(3-2t,\ 2+t,\ -4+4t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(2,\ 1,\ -2)+u(0,\ -2,\ 1)=(2,\ 1-2u,\ -2+u)$$

と表すことができる．

(1) 直線 ℓ と直線 m が交点をもつとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす実数 $s,\ t$ が存在すればよい．

$$\begin{cases} 4+s=3-2t & \cdots\ ① \\ s=2+t & \cdots\ ② \\ -5-3s=-4+4t & \cdots\ ③ \end{cases}$$

①，② より $s=1,\ t=-1$ となり，このとき ③ も成り立つので交点が存在し，その座標は **(5，1，−8)** である．（なお，③ が成り立たないときは直線 ℓ と直線 m は交点をもたないことにも留意しておきたい．）

(2) $\mathrm{A}(8,\ -3,\ 5)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\perp\overrightarrow{n}$ となるときの点 R が求める交点であるので，
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(-6,\ 4-2u,\ -7+u)$ より，
$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{n}=0\cdot(-6)-2\cdot(4-2u)+1\cdot(-7+u)=-15+5u=0$ すなわち $u=3$ である．
よって求める交点の座標は **(2，−5，1)** である．

6. 円 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 上の点 $(a,\ 0)$, $(0,\ a)$ をそれぞれA, Bとし, 原点をOとする。短い方の円弧AB上に $n-1$ 個の点を等間隔にとり円弧ABを n 等分する。これらの点をAに近い方から順に $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots,\ \mathrm{P}_k,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}$ とし，$\mathrm{B}=\mathrm{P}_n$ とするとき，$\angle\mathrm{AOP}_k=\dfrac{k\pi}{\boxed{な}\,n}$ である。

(1) 扇形 OAP_k の面積を S_k とすると，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}S_k=\dfrac{\left(n-\boxed{に}\right)\left(n+\boxed{ぬ}\right)a^{\boxed{ね}}\pi^{\boxed{の}}}{\boxed{はひ}\,n}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}S_k=\frac{a^{\boxed{ね}}\pi^{\boxed{の}}}{\boxed{ふへ}}$$

である。

(2) 弦 AP_k の長さを x_k とすると，$x_k=\boxed{ほ}\,a\sin\left(\dfrac{k\pi}{\boxed{ま}\,n}\right)$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\boxed{み}\left(\boxed{む}-\sqrt{\boxed{め}}\right)a$$

である。

解答

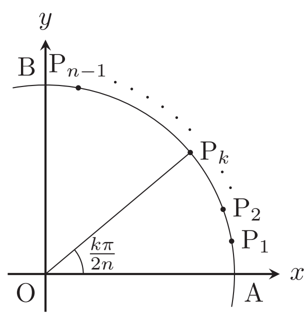
解答記号	正解
$\dfrac{k\pi}{な\,n}$	$\dfrac{k\pi}{2n}$
$\dfrac{(n-に)(n+ぬ)a^{ね}\pi^{の}}{はひ\,n}$	$\dfrac{(n-1)(n+1)a^4\pi^2}{48n}$
$\dfrac{a^{ね}\pi^{の}}{ふへ}$	$\dfrac{a^{ね}\pi^{の}}{48}$
$ほ\,a\sin\left(\dfrac{k\pi}{ま\,n}\right)$	$2a\sin\left(\dfrac{k\pi}{4n}\right)$
$み\left(む-\sqrt{め}\right)a$	$4\left(2-\sqrt{2}\right)a$

解説

$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ を n 等分しているので,

$$\angle\mathrm{AOP}_1=\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2=\angle\mathrm{P}_2\mathrm{OP}_3=\cdots=\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{OB}=\frac{\pi}{2n}$$

であり，$\angle\mathrm{AOP}_k=\boldsymbol{\dfrac{k\pi}{2n}}$ である.



(1) $S_k=\dfrac{1}{2}\cdot a^2\cdot\dfrac{k\pi}{2n}=\dfrac{a^2\pi k}{4n}$ より,

$$\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}S_k=\sum_{k=2}^{n}\frac{a^2\pi(k-1)}{4n}\cdot\frac{a^2\pi k}{4n}$$

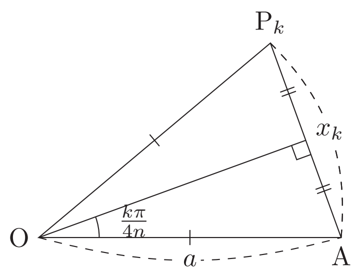
$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^4\pi^2}{16n^2}\sum_{k=2}^{n}(k-1)k \\
&= \frac{a^4\pi^2}{16n^2}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{(n-1)(n+1)a^4\pi^2}{48n}}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}S_k \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a^4\pi^2}{48} \\
&= \boldsymbol{\frac{a^4\pi^2}{48}}
\end{aligned}
$$

である．

(2)　右図より，



$$
x_k = 2a\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}2a\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right) \\
&= \int_0^1 2a\pi\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\
&= \Big[-8a\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\Big]_0^1 \\
&= -8a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) \\
&= \boldsymbol{4(2-\sqrt{2})a}
\end{aligned}
$$

である．

講評

1.［数と式］（やや易）前半は実数係数の 4 次方程式に関する複素共役解の問題．後半は相反方程式となる．いずれも典型題である．(1) の計算がやや煩雑だが，何とか乗り切りたい．

2.［データの分析］（やや難）(1) は落とせない．仮平均を使って要領よく計算したい．(2) は，k の 2 次式とみて平方完成すればよい．実は最小となる k が x_i の平均となることは有名事実であるが，解いた経験がないと気づきにくかっただろう．(3) を突破できたかどうかで差がつきそう．

3.［2 次曲線］（標準）楕円に関する種々の問題．(1) は基本的である．(2) は楕円の接線の傾きに注目すればよいが，楕円上の点の座標を三角関数でおいてもできる．(3) では，題意の領域を 8 個の合同な図形に分割し，さらに伸縮によって扇形（円の一部）にもちこむと楽である．できれば完答したいところだが，処理力で差がつくだろう．

4.［確率］（標準）球に書かれた数字の和がある自然数の倍数となる確率を求める問題．その自然数で，1 から 25 までの数を割った余りで分類していくとよい．(3) では，残りの 3 個の球について考えるべきだろう．

5.［空間座標］（易）(1)(2) ともに基本的で，この問題は確実に正解すべきである．

6.［数学Ⅲの積分］（標準）図形を題材とした，数列，極限，および区分求積についての問題．やや計算が煩雑であるが，問われていることは難しくない．何とか完答したいところである．

2021 年前期同様，マークシート形式だった．2021 年前期は，処理が面倒であったり解法を発想しにくい問題が多かったが，それと比較するとやや穏やかな難易度となっている．目標は 70%.