

解 答 速 報

近畿大学医学部(推薦) 数学

2020年 11月22日実施

1 空欄に入る数を求めよ。

- (1) あるウイルスの検査において、感染している個体が検査で陽性と判断される確率が 70%，感染していない個体が検査で陰性と判断される確率が 99.9% であるとする。全体の p % がこのウイルスに感染している集団から、1つの個体を取り出して検査したところ陽性と判断されたときに、実際にウイルスに感染している確率は、 $p = 0.01$ のとき ， $p = 1$ のとき である。
- (2) “GELGOOG” の 7 文字の並べ替えについて考えると，“GOLGO” を含む並べ方は 通り，“GOGO” を含む並べ方は 通り，“GO” を 1 つだけ含む並べ方は 通りある。

解答

ア $\frac{700}{10699}$ イ $\frac{700}{799}$ ウ 6 エ 24 オ 240

解説

(1) 題意より、以下の表を得る。

	検査で陽性	検査で陰性
感染している	$\frac{p}{100} \times \frac{70}{100}$	$\frac{p}{100} \times \frac{30}{100}$
感染していない	$\left(1 - \frac{p}{100}\right) \times \frac{0.1}{100}$	$\left(1 - \frac{p}{100}\right) \times \frac{99.9}{100}$

よって、陽性と判断された個体が実際にウイルスに感染している確率を p を用いて表すと、

$$\begin{aligned} \frac{\frac{p}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{p}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{100-p}{100} \times \frac{0.1}{100}} &= \frac{70p}{70p + (100-p) \times 0.1} \\ &= \frac{700p}{700p + (100-p)} \\ &= \frac{700p}{699p + 100} \end{aligned}$$

である。よって、 $p = 0.01$ のとき、確率は $\frac{700 \times 0.01}{699 \times 0.01 + 100} = \frac{700}{10699}$ 。

また、 $p = 1$ のとき、確率は $\frac{700 \times 1}{699 \times 1 + 100} = \frac{700}{799}$ 。

(2) 、G, E の 3 個を一行に並べる方法であるから、 $3! = 6$ 通り。

次に、、G, E, L の 4 個を一行に並べる方法であるから、 $4! = 24$ 通り。

さらに、 を含むものは、、G, G, O, E, L の 6 個を一行に並べる方法で、 $\frac{6!}{2!} = 360$ 通り。このうち、 を

2 つ含むものは、 $\frac{5!}{2!} \times 2! = 120$ 通りある。よって、 $\boxed{\text{GO}}$ を 1 個だけ含むものは、 $360 - 120 = 240$ 通り。

別解

$\boxed{\text{GO}}$, G, G, E, L の 5 個を一列に並べて、その間と両端のうち G の直後を除く 4 箇所から 1 箇所選んで O を入れればよいので、 $\frac{5!}{2!} \times {}_4C_1 = 240$ 通り。



全く同じテーマの問題を今年度の模試で出題！ さらに推薦本科の授業で対策済み！

近畿大学医学部模試（2020年9月）

ある病気に感染しているかどうかを判定する検査がある。この検査は、感染者を陽性と判定する確率が $\frac{99}{100}$ 、非感染者を誤って陽性と誤判定してしまう確率が $\frac{1}{100}$ である。

実際に感染している人の割合が $\frac{3}{100}$ であるような集団において、その中から無作為に選ばれた人が検査を受けて陽性と判定された場合、その人が実際に感染している確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また、実際に感染している人の割合が $\boxed{\text{イ}}$ であるような集団において、その中から無作為に選ばれた人が検査を受けて陽性と判定された場合、その人が実際に感染している確率は $\frac{99}{100}$ となる。

近畿大学医学部推薦本科（2020年11月）

ある病気にかかっているかどうかを判定するための簡易検査法がある。この検査法は、

- 病気にかかっているのに、病気にかかっていないと誤って判定してしまう確率が $\frac{1}{4}$
- 病気にかかっていないのに、病気にかかっていると誤って判定してしまう確率が $\frac{1}{13}$

と言われている。

全体の $\frac{1}{14}$ が病気にかかっているとされる集団の中から 1 人を選んで検査する。このとき、病気にかかっていると判定される確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。また、病気にかかっていると判定されたときに、実際には病気にかかっていない確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

2 四面体 ABCD において, $AB = 1, AC = \sqrt{2}, AD = \sqrt{3}$ とし, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}$ とする。

- (1) $\triangle ABD$ の面積を求めよ。
- (2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。
- (3) 辺 AB 上に点 L, 辺 CD 上に点 M をとり, $\angle CLM = 90^\circ$ とする。四面体 ABCD の体積が四面体 BCML の体積の 6 倍になるとき, $AL : LB$ を求めよ。

解答

(1) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{19}}{12}$ (3) 解なし

解説

$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AC} = \vec{c}, \vec{AD} = \vec{d}$ とおく。 $|\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \sqrt{2}, |\vec{d}| = \sqrt{3}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}$ である。

- (1) $\triangle ABD$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{d}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{d})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

である。

- (2) 点 C から平面 ABD に下ろした垂線と平面 ABD との交点を H とし, $\vec{AH} = x\vec{b} + y\vec{d}$ とおく。 $\vec{CH} \perp \vec{AB}$ かつ $\vec{CH} \perp \vec{AD}$ より,

$$\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0 \dots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad \vec{CH} \cdot \vec{AD} = 0 \dots \textcircled{2}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff (\vec{AH} - \vec{AC}) \cdot \vec{AB} = 0 \\ &\iff (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \\ &\iff x|\vec{b}|^2 + y\vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \\ &\iff x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\iff (\vec{AH} - \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0 \\ &\iff (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{c}) \cdot \vec{d} = 0 \\ &\iff x\vec{b} \cdot \vec{d} + y|\vec{d}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}x + 3y - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

これらを解くと $x = \frac{5}{11}, y = \frac{1}{11}$ が得られるので, $\vec{CH} = \frac{1}{11}(5\vec{b} + \vec{d} - 11\vec{c})$ となる。 よって,

$$\begin{aligned} |\vec{CH}|^2 &= \frac{1}{121} |5\vec{b} + \vec{d} - 11\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{121} (25|\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 + 121|\vec{c}|^2 + 10\vec{b} \cdot \vec{d} - 22\vec{c} \cdot \vec{d} - 110\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{121} (25 + 3 + 242 + 5 - 11 - 55) \\ &= \frac{209}{121} = \frac{19}{11} \end{aligned}$$

となるので、求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \sqrt{\frac{19}{11}} = \frac{\sqrt{19}}{12}$$

(3) AB の中点を O とすると $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{b}$ であり、

$$\vec{AB} \cdot \vec{CO} = \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \right) = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{DO} = \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{d} \right) = \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

となるので、AB と CO は垂直、AB と DO は垂直である。ゆえに平面 COD は辺 AB と垂直である。よって、

$$\angle COD \geq \angle CLD \geq \angle CLM$$

となるが、

$$\begin{aligned} \vec{OC} \cdot \vec{OD} &= \left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) \cdot \left(\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) \\ &= \vec{c} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} > 0 \end{aligned}$$

となるので $\angle COD < 90^\circ$ である。よって $\angle CLM = 90^\circ$ となることはあり得ない。

要するに $\angle COD$ は三角形 ABC と三角形 ABD のなす角であるが、この角より $\angle CLM$ が大きくなることはあり得ない。したがって、**解なし**。

注釈

上のように平面 COD が辺 AB と垂直であることに気付ければ、(2) の体積は $\frac{1}{3} \times (\text{三角形 OCD の面積}) \times AB$ で求めるのが簡単である。

別解

素直に解いていくと以下ようになる。

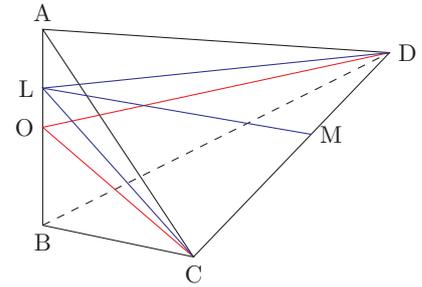
AL : LB = (1 - s) : s, CM : MD = t : (1 - t) とおく。ただし題意から L, M はそれぞれ辺 AB 上、辺 CD 上にあるので、 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ である。

$$\vec{AL} = (1 - s)\vec{b}, \vec{AM} = (1 - t)\vec{c} + t\vec{d}$$

となる。 $\angle CLM = 90^\circ$ という条件より、

$$\begin{aligned} \vec{LC} \cdot \vec{LM} &= 0 \\ \iff (\vec{AC} - \vec{AL}) \cdot (\vec{AM} - \vec{AL}) &= 0 \\ \iff \{ \vec{c} - (1 - s)\vec{b} \} \cdot \{ (1 - t)\vec{c} + t\vec{d} - (1 - s)\vec{b} \} &= 0 \\ \iff (1 - t)|\vec{c}|^2 + t\vec{c} \cdot \vec{d} - (1 - s)\vec{b} \cdot \vec{c} - (1 - s)(1 - t)\vec{b} \cdot \vec{c} - (1 - s)t\vec{b} \cdot \vec{d} + (1 - s)^2|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \iff 2(1 - t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(1 - s) - \frac{1}{2}(1 - s)(1 - t) - \frac{1}{2}(1 - s)t + (1 - s)^2 &= 0 \\ \iff t = \frac{2}{3}(s^2 - s + 2) \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。これにより、 $t = \frac{2}{3} \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{6} > 1$ となるので、 $0 \leq t \leq 1$ に反する (M が辺 CD 上にない)。つまり、題意の体積比の条件にかかわらず解がないことがわかる。



体積比を考慮して議論を進めてみると以下の通りとなる.

$$(\text{ABCD の体積}) : (\text{BCML の体積}) = 1 : \frac{\text{LB}}{\text{AB}} \cdot \frac{\triangle \text{BCM}}{\triangle \text{BCD}} = 1 : \frac{\text{LB}}{\text{AB}} \cdot \frac{\text{CM}}{\text{CD}} = 1 : st$$

であるから, 題意の体積比の条件から $st = \frac{1}{6} \dots \textcircled{4}$ である. これに $\textcircled{3}$ を代入して整理すると

$$4s^3 - 4s^2 + 8s - 1 = 0 \dots \textcircled{5}$$

となる. $\textcircled{5}$ の左辺を $f(s)$ とおく. $f'(s) = 12s^2 - 8s + 8 = 4(3s^2 - 2s + 2) > 0$ が成り立つので, 関数 $f(s)$ は単調増加である. $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{13}{54} > 0$ であるから, 方程式 $\textcircled{5}$ はただ 1 つの実数解を $0 < s < \frac{1}{6}$ の範囲にもつ (ちなみに解は有理数ではない). このとき, $\textcircled{4}$ より $t > 1$ となり $0 \leq t \leq 1$ に反する. したがって, 題意を満たす点 L, M は存在しない.

3 x の 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。ただし、 a, b は実数とする。

- (1) $f(2)$ の値を、 $f(0)$ と $f(1)$ を用いて表せ。
- (2) $f(0), f(1), f(2)$ のうち少なくとも 1 つは絶対値が $\frac{1}{2}$ 以上であることを示せ。
- (3) $f(0), f(1), f(2)$ のうち 1 つだけの絶対値が $\frac{1}{2}$ 以上となり、残り 2 つの絶対値が $\frac{1}{2}$ より小さいような (a, b) の範囲を ab 平面上に図示したとき、その領域の面積を求めよ。

解答

- (1) $f(0) = b, f(1) = 1 + a + b$ を a, b について解くと $b = f(0), a = f(1) - f(0) - 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 + 2a + b \\ &= 4 + 2(f(1) - f(0) - 1) + f(0) \\ &= -f(0) + 2f(1) + 2 \end{aligned}$$

である。

- (2) 背理法で証明する。 $f(0), f(1), f(2)$ のすべての絶対値が $\frac{1}{2}$ 未満であるとして矛盾を示す。

$$-\frac{1}{2} < f(0) < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$-\frac{1}{2} < f(1) < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-\frac{1}{2} < f(2) < \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

② より $-1 < -2f(1) < 1 \dots \textcircled{2}'$ なので、 $\textcircled{1} + \textcircled{3} + \textcircled{2}'$ より

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 < f(0) + f(2) - 2f(1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

つまり $-2 < f(0) + f(2) - 2f(1) < 2$ を得るが、これは (1) で得られた等式を移項した $f(0) + f(2) - 2f(1) = 2$ に矛盾する。以上により証明された。

- (3) 領域 S_1, S_2, S_3 を次のように定める。

$$S_1 = \left\{ (a, b) \mid |f(0)| \geq \frac{1}{2}, |f(1)| < \frac{1}{2}, |f(2)| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (a, b) \mid |f(0)| < \frac{1}{2}, |f(1)| \geq \frac{1}{2}, |f(2)| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (a, b) \mid |f(0)| < \frac{1}{2}, |f(1)| < \frac{1}{2}, |f(2)| \geq \frac{1}{2} \right\}$$

S_1, S_2, S_3 はどの 2 つも共通部分はないが、(2) によると、これらは次のように書くこともできる。

$$S_1 = \left\{ (a, b) \mid |f(1)| < \frac{1}{2}, |f(2)| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (a, b) \mid |f(0)| < \frac{1}{2}, |f(2)| < \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (a, b) \mid |f(0)| < \frac{1}{2}, |f(1)| < \frac{1}{2} \right\}$$

それぞれの領域は平行四辺形であり、その面積は平行移動してできる平行四辺形

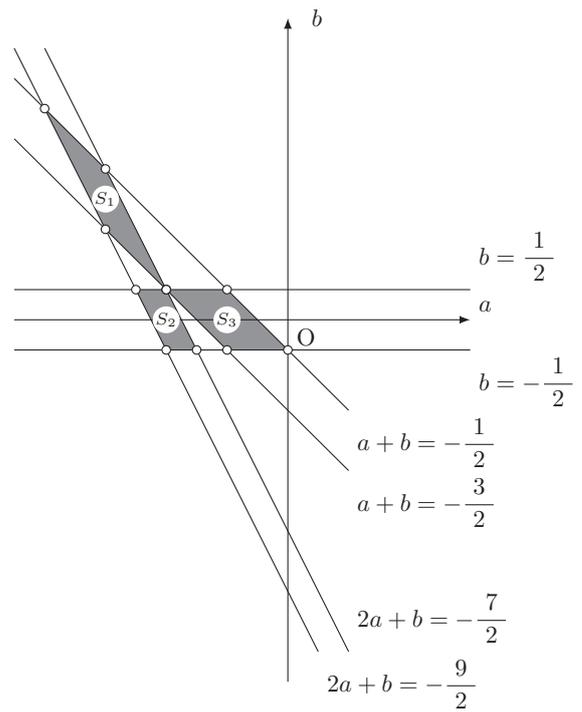
$$T_1 = \{(a, b) \mid 0 < a + b < 1, 0 < 2a + b < 1\}$$

$$T_2 = \{(a, b) \mid 0 < b < 1, 0 < 2a + b < 1\}$$

$$T_3 = \{(a, b) \mid 0 < b < 1, 0 < a + b < 1\}$$

の面積に等しい. $(T_1 \text{ の面積}) = 1$, $(T_2 \text{ の面積}) = \frac{1}{2}$, $(T_3 \text{ の面積}) = 1$ なので, 求める面積は $1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ である.

ちなみに S_1, S_2, S_3 の領域を図示すると右のようになる (ただし境界上の点は除く). この図を正確にかけば, (2) も同時に証明されたことになる.



講評

① [場合の数と確率] ((1) やや易 (2) 標準) (1) は条件付き確率. (2) は同じ文字を含む順列の問題で隣り合う文字を1つのかたまりとして考える典型題である. ② 以外は確実に取っておきたいところである.

② [空間ベクトル] (難) 計量を含む空間ベクトルの問題. (1) は基本的. (2) は点 C から平面 ABD に下ろした垂線を高さとするればよく, この計算を合わせられるかが合否に影響しそう. (3) では題意を満たす点が存在せず, 出題ミスだと思われる. 通常考えられる解法で解き進めていくと, 得られる3次方程式が有理数解をもたないため, ここで混乱した受験生には不利に働きかねない. 上に示した別解のように条件を満たす解がないという議論には中々もちこめないだろう.

③ [図形と方程式] (やや難) (2) は, (1) を利用して背理法で証明することができるが, (3) の領域を正確にかいて示してもよい. (3) はやや作業量が多くグラフを図示することも面倒であるため, 完答するのは難しい.

① の条件付き確率, ③ の領域図示など, 例年に比べると目新しい出題が見られた. ②, ③ は一部方針の立てにくい問題があり, 処理量も多いため得点を取りにくい. ① の ②~⑤, ②(1)(2), ③(1) で確実に得点し, それ以外の設問でうまく立ち回れるかどうかの勝負になる. 目標は 55%.

メルマガ無料登録で全教科配信! 本解答速報の内容に関するお問合せはメビオ ☎0120-146-156 まで

医学部進学予備校
メビオ
 ☎ 0120-146-156
 受付 9~21時(土日祝可・携帯からOK)
 大阪市中央区石町 2-3-12
 ベルヴォア天満橋
<https://www.mebio.co.jp/>

医学部専門予備校
YMS
 heart of medicine
 ☎ 03-3370-0410
 受付 8~20時(土日祝可)
 東京都渋谷区代々木 1-37-14
<https://yms.ne.jp/>