解答速報

近畿大学医学部（後期）　数学

2021年 2月28日実施

1　1 から n $(n \geqq 3)$ までの整数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．無作為に 3 枚選ぶとき，取り出したカードに書かれた数について次の問いに答えよ．

(1)　3 つの数が連続している確率は $\boxed{\text{ア}}$ であり，3 つの数のうち 2 つだけが連続している確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．したがって，3 つの数がどの 2 つも連続していない確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　3 つの数のうち，2 つの和が残りの 1 つの数に等しくなる確率は，n が奇数のとき $\boxed{\text{エ}}$ であり，n が偶数のとき $\boxed{\text{オ}}$ である．

解答

ア $\dfrac{6}{n(n-1)}$　イ $\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$　ウ $\dfrac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$　エ $\dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)}$　オ $\dfrac{3}{2(n-1)}$

解説

(1)　全事象は，${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り．

3 つの整数が連続しているのは，(1, 2, 3), $\cdots$, $(n-2,\ n-1,\ n)$ までの $n-2$ 通り．ゆえに，3 つの数が連続している確率は，$\dfrac{(n-2)}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \boldsymbol{\dfrac{6}{n(n-1)}}$.

$n \geqq 4$ のとき，3 つの数のうち 2 つだけが連続しているのは，(1, 2) と $(n-1,\ n)$ に対して $n-3$ 通りずつあり，(2, 3), (3, 4), $\cdots$, $(n-2,\ n-1)$ に対して $n-4$ 通りずつある．ゆえに，3 つの数のうち 2 つだけが連続している確率は，

$$\frac{2(n-3)+(n-3)(n-4)}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \boldsymbol{\frac{6(n-3)}{n(n-1)}}$$

これは，$n=3$ のときも成り立つ．

3 つの数がどの 2 つも連続していない確率は，余事象の確率より，

$$1-\frac{6}{n(n-1)}-\frac{6(n-3)}{n(n-1)} = \frac{n^2-7n+12}{n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$

$n=3,\ 4$ のときは，題意の状況は起こらないため確率は 0 である，つまりこの式は $n=3,\ 4$ の場合も成り立つ．

別解 1

イ，ウは，次のように求めることもできる．

イに関して．$n \geqq 4$ のとき，$n-3$ 個の×を一列に並べ，その両端および間 $n-2$ 箇所から 2 箇所を選んで $\boxed{\text{○○}}$, $\boxed{\text{○}}$ を入れる．このとき，○と×は計 n 個並んでいるので，左から○と×に 1, 2, 3, $\cdots$, n の数を対

応させたとき，○に対応する数が選ばれた数と考えれば，題意を満たす状況が作れる．ゆえに，3 つの数のうち 2 つだけが連続している確率は，

$$\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2 \cdot 2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \boldsymbol{\frac{6(n-3)}{n(n-1)}}$$

これは，$n=3$ のときも成り立つ．

ウに関しても同様に考えると，$n \geqq 5$ のとき，$n-3$ 個の×を一列に並べ，その両端および間 $n-2$ 箇所から 3 箇所を選んで○を入れればよい．ゆえに，3 つの数がどの 2 つも連続していない確率は，

$$\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_3} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$

である．この式は $n=3,\ 4$ の場合も成り立つ．

別解 2

ウの別解

3 数を $(k,\ l,\ m)$ $(1 \leqq k < l < m \leqq n)$ とおく．真ん中の数 l は $3 \leqq l \leqq n-2$ の範囲にある，l を固定すると k の選び方が $l-2$ 通り，m の選び方が $n-l-1$ 通りあるので，総数は

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=3}^{n-2}(l-2)(n-l-1)\\
&=\sum_{i=1}^{n-4} i(-i+n-3) \quad (l-2=i \text{ と置換した})\\
&=-\frac{(n-4)(n-3)(2n-7)}{6}+\frac{(n-3)(n-4)(n-3)}{2}\\
&=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}
\end{aligned}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}{{}_n\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$

である．この式は $n=3,\ 4$ の場合も成り立つ．

別解 3

ウの別解

題意を満たす 3 数を $i,\ j,\ k$ とすると，

$$1 \leqq i < j-1 < k-2 \leqq n-2 \cdots ①$$

であるから，題意を満たす $(i,\ j,\ k)$ $(1 \leqq i < j < k \leqq n)$ の組全体の集合は ① を満たす $(i,\ j-1,\ k-2)$ を満たす組全体の集合と 1 対 1 に対応する．したがって，その総数は ${}_{n-2}\mathrm{C}_3$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_3} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \boldsymbol{\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}}$$

である．この式は $n=3,\ 4$ の場合も成り立つ．

(2)　3 つの数を $x,\ y,\ z$ とするとき，大小は一意に決まるので，$x<y<z$ として考えてよい．このとき，2 つの和が残りの 1 つの数に等しくなるのは，$x+y=z$ のときである．

(i)　$n=2m+1$（m は自然数）のとき，
$x=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ とおくと，y は，

$$y=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2m-k+1$$

の $2m-2k+1$ 通りあり，これらに対して z の値は 1 通りに決まる．よって，$(x,\ y,\ z)$ の場合の数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)&=\sum_{k=1}^{m}\{2(m-k)+1\}\\&=2\sum_{k=1}^{m-1}k+m\\&=2\cdot\frac{1}{2}m(m-1)+m\\&=m^2\\&=\frac{(n-1)^2}{4}\qquad\left(\because\quad m=\frac{n-1}{2}\right)\end{aligned}$$

である．ゆえに，n が奇数のときの確率は，

$$\frac{\dfrac{(n-1)^2}{4}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\boldsymbol{\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}}$$

(ii)　$n=2m$（m は 2 以上の自然数）のとき，
$x=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ とおくと，y は，

$$y=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2m-k$$

の $2m-2k$ 通りあり，これらに対して z の値は 1 通りに決まる．よって，$(x,\ y,\ z)$ の場合の数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k)&=\sum_{k=1}^{m-1}2k\\&=2\cdot\frac{1}{2}m(m-1)\\&=m^2-m\\&=\frac{n^2-2n}{4}\qquad\left(\because\quad m=\frac{n}{2}\right)\end{aligned}$$

である．ゆえに，n が偶数のときの確率は，

$$\frac{\dfrac{n^2-2n}{4}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\boldsymbol{\frac{3}{2(n-1)}}$$

2 次の問いに答えよ．

(1) 実数 x，y が $|x|+|y|=1$ を満たすとき，$(x-3)^2+(y-1)^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 実数 x，y が $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ を満たすとき，$|x|+|y|$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 実数 x，y が $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ を満たすとき，$|x|+|y|$ の最大値と最小値を求めよ．

解答

(1) 最大値 17，最小値 5　(2) 最大値 $4+\sqrt{2}$，最小値 $4-\sqrt{2}$　(3) 最大値 $4+2\sqrt{2}$，最小値 $3-\sqrt{3}$

解説

xy 平面上の図形として考えることにする．

$$|x|+|y|=1\cdots①,\ (x-3)^2+(y-1)^2=1\cdots②,\ (x-3)^2+(y-1)^2=4\cdots③$$

とすると，

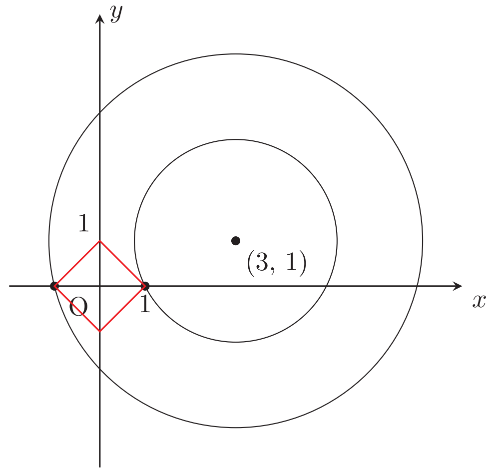
① は 4 点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$ を結んでできる正方形，
② は中心 $(3,\ 1)$，半径 1 の円，
③ は中心 $(3,\ 1)$，半径 2 の円

を表している．

(1) $(x-3)^2+(y-1)^2=k\cdots④$ とおくと，これは中心が $(3,\ 1)$ で半径が $\sqrt{k}$ の円である．① と ④ が共有点をもつような k の最大値と最小値を求めればよい．

④ の中心 $(3,\ 1)$ から点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$ までの距離はそれぞれ $\sqrt{17}$，$\sqrt{13}$ であるから，k が最大となるのは ④ が点 $(-1,\ 0)$ を通るときである．したがって，このとき $k=17$ となるので，求める最大値は **17** である．

④ の中心 $(3,\ 1)$ から点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ までの距離はそれぞれ $\sqrt{5}$，3 であるから，k が最小となるのは ④ が点 $(1,\ 0)$ を通るときである．したがって，このとき $k=5$ となるので求める最小値は **5** である．

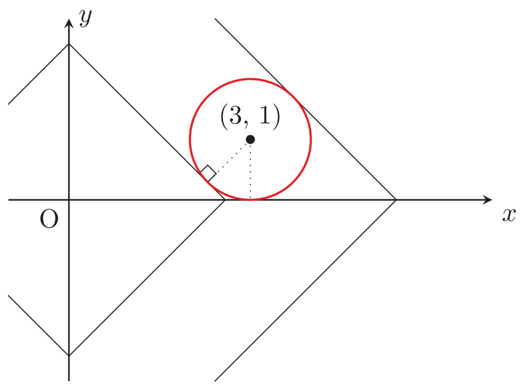


(2) $|x|+|y|=k\ (k \geqq 0)\cdots⑤$ とおくと，これは 4 点 $(k,0)$，$(0,\ k)$，$(-k,\ 0)$，$(0,\ -k)$ を結んでできる正方形である．② と ⑤ が共有点をもつような k の最大値と最小値を求めればよい．

②と⑤が共有点をもつなら $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ の領域においてであるから，この領域内で考えることにすると，⑤ は $x+y-k=0\cdots⑥$ となる．円 ② が直線 ⑥ に接するとき，中心 $(3,\ 1)$ から ⑥ までの距離が 1 となるので，

$$\frac{|3+1-k|}{\sqrt{2}}=1 \iff k=4\pm\sqrt{2}$$

となる．したがって，最大値は $\boldsymbol{4+\sqrt{2}}$，最小値は $\boldsymbol{4-\sqrt{2}}$ である．



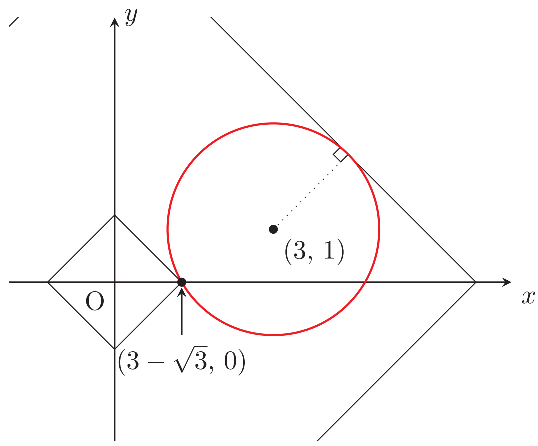
(3) ③ と (2) の ⑤ が共有点を持つような k の最大値と最小値を求めればよい．

円 ③ が $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ において ⑥ に接する値のうち，大きい方の値が求める最大値である．このとき中心 $(3,\ 1)$ から ⑥ までの距離が 2 となるので，

$$\frac{|3+1-k|}{\sqrt{2}} = 2 \iff k = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

であるから，求める最大値は $\mathbf{4+2\sqrt{2}}$ である．

次に，x 軸と③との交点の x 座標のうち，小さい方は $x = 3-\sqrt{3}$ である．$k = 4-2\sqrt{2}$ のときの③と⑥の接点は，領域 $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ に存在しないことに注意すると，最小となるのは ⑤ が点 $(3-\sqrt{3},\ 0)$ を通るときである．このとき $k = 3-\sqrt{3}$ がわかるので，求める最小値は $\mathbf{3-\sqrt{3}}$ である．



3　$\alpha = 2\sin 10^\circ$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x = \alpha$ は，方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ．

(2)　$0 < t < 1$ とする．$y = x^3 - tx^2 - x + t$ のグラフと x 軸で囲まれる部分のうち $x \geqq 0$ を満たす部分の面積の和を S とする．S は $t = \alpha$ で最小となることを示せ．

(3)　(2) の最小値を m とするとき，$\dfrac{1}{8} < m < \dfrac{1}{4}$ であることを示せ．

解答

(1)　3 倍角の公式より

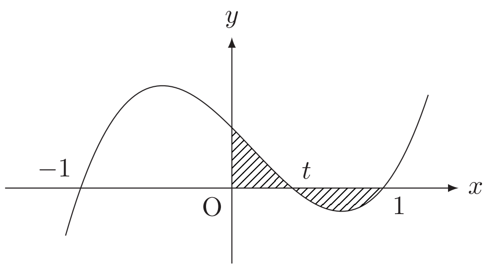
$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$$

$$\iff \frac{1}{2} = 3\cdot\frac{\alpha}{2} - 4\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3$$

$$\iff \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$$

となるので，α は $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解である．　（証明終）

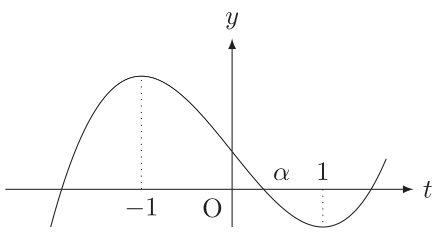
(2)　$y = x^3 - tx^2 - x + t = (x-t)(x+1)(x-1)$ となるので，題意の面積は以下の斜線部分である．



$$\begin{aligned}
S &= \int_0^t (x^3 - tx^2 - x + t)\,dx - \int_t^1 (x^3 - tx^2 - x + t)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{tx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + tx\right]_0^t - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{tx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + tx\right]_t^1 \\
&= -\frac{1}{6}t^4 + t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{4} \\
\frac{dS}{dt} &= -\frac{2}{3}t^3 + 2t - \frac{2}{3} \\
&= -\frac{2}{3}(t^3 - 3t + 1)
\end{aligned}$$

ここで，$y = t^3 - 3t + 1$ とすると $y' = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$ より，この関数の増減，グラフは以下の通りである．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



$0 < 2\sin 10^\circ < 2\sin 30^\circ = 1$ より $0 < \alpha < 1$ であることとグラフより，$0 < t < 1$ における $\dfrac{dS}{dt} = 0$ の解は

$t=\alpha$ のみであることがわかるので，S の増減は以下の通りとなる．

t	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
dS/dt		$-$	0	$+$	
S	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{5}{12}$

したがって，S は $t=\alpha$ で最小となる．　(証明終)

(3)　前問の S の増減表より，明らかに $m<\dfrac{1}{4}$ である．また，

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{6}\alpha^4+\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{6}\alpha(\alpha^3-3\alpha+1)+\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4} \\ &= 0+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8} \\ &> \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\left(\alpha \fallingdotseq \frac{1}{2}\text{ であることは}, x=\frac{1}{2}\text{ が }x^3-3x+1=0\text{ の解でないことからわかる}\right)$$

である．したがって，$\dfrac{1}{8}<m<\dfrac{1}{4}$ である．　(証明終)

講評

$\boxed{1}$［確率］((1) 標準 (2) やや難)

n 枚のカードから取り出した 3 枚について，与えられた条件を満たす確率を求める問題．丁寧に調べ上げて正解を導きたいところだが，空所補充形式なので慎重に作業する必要があり，この問題で大きく差がつくだろう．

$\boxed{2}$［図形と式］(易)

円と斜めに傾いた正方形を題材とした，「領域と最大最小」の問題．どれも基本的であり，落とせない．端点を通るときか接するときかを取り違えないように，正しく図示することが重要となる．

$\boxed{3}$［三角関数，数学 II の微積分］(やや難)

3 次方程式の解についての議論，および 4 次関数の増減についての問題．(1) では 3 倍角の公式を利用すればよい．これは典型題であるが，同種の問題を解いた経験がないと厳しいかも知れない．(2) の S の計算は素直に積分するのがよいだろう．最小値の議論，および (3) で次数下げが利用できたかで差がつきそうである．

2021 年度前期と比べると易化している．分量についても，昨今の近畿大学医学部の出題と比べると軽い．$\boxed{2}$は完答したい．$\boxed{1}$，$\boxed{3}$について，前半を押さえた上で後半でうまく立ち回りたいところである．目標は 75%.