解答速報

近畿大学医学部（前期）　数学

2021年 1月31日実施

1　箱 A の中には $\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{5}$，$\boxed{7}$，$\boxed{11}$，$\boxed{13}$ のカードが 1 枚ずつ，箱 B の中には $\boxed{1}$，$\boxed{4}$，$\boxed{6}$，$\boxed{8}$，$\boxed{9}$，$\boxed{10}$，$\boxed{12}$ のカードが 1 枚ずつ入っている。箱 A と B の中から 1 枚ずつ取り出し，横に並べて 2 つの整数 $p,\ q\ (p \leqq q)$ を構成する。例えば，箱 A から $\boxed{2}$ を，箱 B から $\boxed{1}$ を取り出すとき $(p,\ q) = (12,\ 21)$，箱 A から $\boxed{11}$ を，箱 B から $\boxed{12}$ を取り出すとき $(p,\ q) = (1112,\ 1211)$ とする。

(1)　p と q の最大公約数が 9 である確率は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2)　p と q の最大公約数が 6 である確率は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3)　p と q の最大公約数が 3 である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4)　p と q の最大公約数が 1 である確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

解答

ア $\dfrac{1}{21}$　イ $\dfrac{1}{21}$　ウ $\dfrac{4}{21}$　エ $\dfrac{25}{42}$

解説

(1)　すべての取り出し方は $7 \times 6 = 42$ 通り．
以下，箱 A から取り出したカードに書かれた値を a，箱 B から取り出したカードに書かれた値を b とおく．
$a+b$ が 9 の倍数になることが必要である．その必要条件を満たすのは，$(a,\ b) = (3,\ 6),\ (5,\ 4)$ であるが，そのとき，$(p,\ q) = (36,\ 63),\ (45,\ 54)$ であるのでいずれも十分である．したがって求める確率は $\dfrac{2}{42} = \mathbf{\dfrac{1}{21}}$ である．

(2)　「$a+b$ が 3 の倍数」かつ「a と b が両方とも偶数である」ことが必要である．その必要条件を満たすのは，$(a,\ b) = (2,\ 4),\ (2,\ 10)$ であるが，そのとき，$(p,\ q) = (24,\ 42),\ (102,\ 210)$ であるのでいずれも十分である．したがって求める確率は $\dfrac{2}{42} = \mathbf{\dfrac{1}{21}}$ である．

(3)　「$a+b$ が 9 の倍数ではない 3 の倍数」かつ，「a と b の最大公約数が 1 または 3 である」ことが必要である．その必要条件を満たすのは，

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (3,\ 9),\ (3,\ 12),\ (5,\ 1),\ (7,\ 8),\ (11,\ 1),\ (11,\ 4),\ (11,\ 10),\ (13,\ 8)$$

であるが，そのとき，

$$(p,\ q) = (12,\ 21),\ (39,\ 93),\ (123,\ 312),\ (15,\ 51),\ (78,\ 87),$$
$$(111,\ 111),\ (114,\ 411),\ (1011,\ 1110),\ (138,\ 813)$$

であるので，$(p,\ q) = (111,\ 111)$ を除いていずれも十分である．したがって求める確率は $\dfrac{8}{42} = \mathbf{\dfrac{4}{21}}$ である．

(4) 「$a+b$ が 3 の倍数ではない」かつ「a と b が互いに素」であることが必要である．その必要条件を満たすのは，

$$(a,\ b)=(2,\ 9),\ (3,\ 1),\ (3,\ 4),\ (3,\ 8),\ (3,\ 10),\ (5,\ 6),\ (5,\ 8),\ (5,\ 9),\ (5,\ 12),$$
$$(7,\ 1),\ (7,\ 4),\ (7,\ 6),\ (7,\ 9),\ (7,\ 10),\ (7,\ 12),$$
$$(11,\ 6),\ (11,\ 8),\ (11,\ 9),\ (11,\ 12),$$
$$(13,\ 1),\ (13,\ 4),\ (13,\ 6),\ (13,\ 9),\ (13,\ 10),\ (13,\ 12)$$

であるが，そのとき，

$$(p,\ q)=(29,\ 92),\ (13,\ 31),\ (34,\ 43),\ (38,\ 83),\ (103,\ 310),\ (56,\ 65),\ (58,\ 85),\ (59,\ 95),\ (125,\ 512),$$
$$(17,\ 71),\ (47,\ 74),\ (67,\ 76),\ (79,\ 97),\ (107,\ 710),\ (127,\ 712),\ (116,\ 611),$$
$$(118,\ 811),\ (119,\ 911),\ (1112,\ 1211),\ (113,\ 131),\ (134,\ 413),\ (136,\ 613),\ (139,\ 913),$$
$$(1013,\ 1310),\ (1213,\ 1312)$$

であるのでいずれも十分である．したがって求める確率は $\mathbf{\dfrac{25}{42}}$ である．

参考

$(p,\ q)$ の組と最大公約数をすべて調べると以下の通りである．

	1	4	6	8	9	10	12
2	(12, 21) 3	(24, 42) 6	(26, 62) 2	(28, 82) 2	(29, 92) 1	(102, 210) 6	(122, 212) 2
3	(13, 31) 1	(34, 43) 1	(36, 63) 9	(38, 83) 1	(39, 93) 3	(103, 310) 1	(123, 312) 3
5	(15, 51) 3	(45, 54) 9	(56, 65) 1	(58, 85) 1	(59, 95) 1	(105, 510) 15	(125, 512) 1
7	(17, 71) 1	(47, 74) 1	(67, 76) 1	(78, 87) 3	(79, 97) 1	(107, 710) 1	(127, 712) 1
11	(111, 111) 111	(114, 411) 3	(116, 611) 1	(118, 811) 1	(119, 911) 1	(1011, 1110) 3	(1112, 1211) 1
13	(113, 131) 1	(134, 413) 1	(136, 613) 1	(138, 813) 3	(139, 913) 1	(1013, 1310) 1	(1213, 1312) 1

2 2 次関数 $f(x)$ が以下を満たすとする。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2,\quad f(47)=0$$

(1) このとき $f(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ が最大値をとる x の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)\geqq 0$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

(3) 正の整数 k に対し $f(x)\geqq k$ を満たす整数 x の個数が 21 個であるとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 不等式 $f(x)\geqq y$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

解答

(1) $f(x)=-x^2+4x+2021$, $f(x)$ が最大値をとる x の値は 2

(2) 91 個 (3) $1904<k\leqq 1925$ (4) 63779 個

解説

(1) 与えられた条件より

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=-2,\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

がわかる．$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f'(x)=2ax+b$ であるから

$$f'(3)=6a+b=-2\cdots①$$

$$f'(1)=2a+b=2\cdots②$$

が成り立つ．この連立方程式を解いて $a=-1,\ b=4$ を得る．

また $f(47)=0$ より $-47^2+4\cdot 47+c=0$ である．これより $c=47^2-4\cdot 47=43\cdot 47=2021$ とわかる．

以上より $f(x)=\boldsymbol{-x^2+4x+2021}$ である．平方完成すると $f(x)=-(x-2)^2+2025$ であるから，$f(x)$ が最大値をとる x の値は $x=\mathbf{2}$ である．

(2) $f(x)=-x^2+4x+2021\geqq 0 \iff -(x+43)(x-47)\geqq 0 \iff -43\leqq x\leqq 47$ を満たす整数 x は $47-(-44)=\mathbf{91}$ **個**.

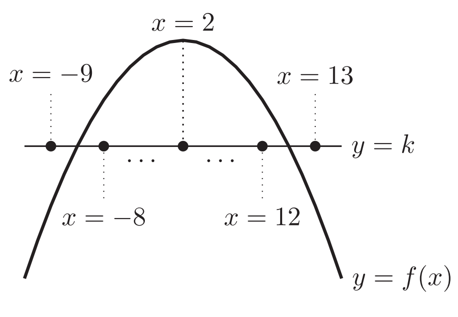
(3) $y=f(x)$ のグラフは $x=2$ に関して対称であるから 21 個からなる集合 $\{x\mid f(x)\geqq k\}$ は

$$\{-8,\ -7,\ \cdots,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$$

でなければならない．そのためには

$$f(-9)<k\leqq f(-8)\ (\iff f(12)\geqq k>f(13))$$

であることが必要十分である（右図を参照のこと）.



$f(x)=-(x+43)(x-47)$ を用いると，

$$f(-9)(=f(13))=34\times 56=1904,\quad f(-8)(=f(12))=35\times 55=1925$$

より答は $\boldsymbol{1904<k\leqq 1925}$.

（k は正の整数なので $1905\leqq k\leqq 1925$ のような答え方もできる.）

(4)　$f(x) > 0$ を解くと $-43 < x < 47$ なので，$x = i$ ($i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 46$) に分割して数えると，求める正の整数の組の数は

$$\sum_{i=1}^{46} f(i) = \sum_{i=1}^{46}(-i^2 + 4i + 2021)$$
$$= -\frac{46 \cdot 47 \cdot 93}{6} + 4 \cdot \frac{46 \cdot 47}{2} + 46 \cdot 43 \cdot 47 = \frac{46 \cdot 47}{2}(-31 + 4 + 86)$$
$$= 23 \cdot 47 \cdot 59 = \mathbf{63779}$$

3 $\triangle$OAB は鋭角三角形であるとする。点 O から辺 AB に下ろした垂線を OC とする。$st \neq 1$ を満たす正の実数 s, t に対し，辺 OA を $s:1$ に内分する点を D，辺 OB を $1:t$ に内分する点を E，直線 DE と直線 AB の交点を F とする。点 F が辺 AB を $u:1$ に外分する点であるように実数 u を定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = h\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を満たす h を s, t の式で表せ。

(2) u を s, t の式で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = k\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を満たす k を s, t の式で表せ。

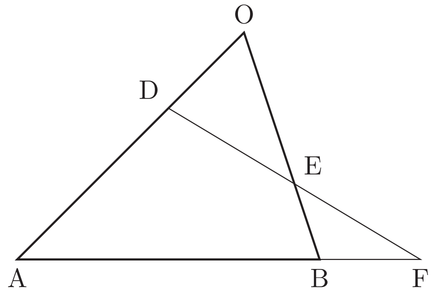
(4) $\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{OBA} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}}$ の最小値およびそのときの s, t の値を求めよ。

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{DO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -s\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$ である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は一次独立であるから，$h = \boldsymbol{-s}$ である．

(2) $st \neq 1$ なので，2 直線 AB, DE は平行ではない．

このとき，メネラウスの定理により



$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}} = 1$$
$$\iff \frac{s}{1} \cdot \frac{u}{1} \cdot \frac{t}{1} = 1$$
$$\iff u = \boldsymbol{\frac{1}{st}}$$

である．

(3) メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{ED}} \cdot \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OA}} \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BF}} = 1$$
$$\iff \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{ED}} \cdot \frac{s}{s+1} \cdot \frac{u-1}{1} = 1$$
$$\iff \mathrm{FE} : \mathrm{ED} = s+1 : s(u-1)$$

であるから，

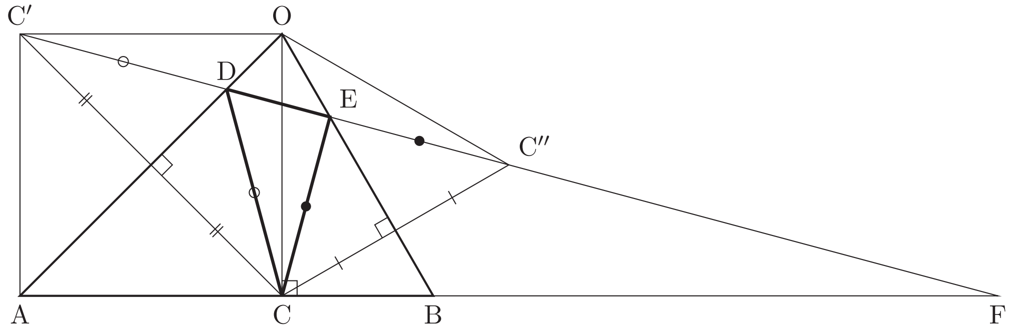
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \frac{s(u-1)+s+1}{s(u-1)}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \\ &= \frac{su+1}{s(u-1)}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \\ &= \frac{1+t}{1-st}\overrightarrow{\mathrm{DE}} \qquad \text{((2) の結果を用いた)}\end{aligned}$$

である（ $u > 1$ の場合で計算をしたが，$0 < u < 1$ の場合も結果は同様である）．ゆえに，$\boldsymbol{k = \dfrac{1+t}{1-st}}$.

(4) 点 C の直線 OA，OB に関する対称点をそれぞれ C$'$，C$''$ とおく．このとき

$$\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC} = \mathrm{C'D}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC''}$$

であるから，これが最小となるのは C$'$，D，E，C$''$ が同一直線上にあるときである．このとき，$\triangle$OC$'$C は $\mathrm{OC} : \mathrm{OC'} : \mathrm{CC'} = 1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角三角形，$\triangle$OCC$''$ は正三角形となることに注意しておく．



$\mathrm{CB} = k$ とおくと,

$$\mathrm{AB} = (1+\sqrt{3})k,\ \mathrm{OC'} = \mathrm{OC} = \sqrt{3}k,\ \mathrm{OC''} = \mathrm{OC} = \sqrt{3}k$$

および

$$\angle \mathrm{C'OC''} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

であるから，余弦定理を用いると求める最小値は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{C'C''}}{\mathrm{AB}} &= \frac{\sqrt{3k^2+3k^2-2\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k\cos\dfrac{5}{6}\pi}}{(\sqrt{3}+1)k} \\ &= \frac{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{\frac{6+3\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}} = \sqrt{\frac{3(2+\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

である．このとき，$\triangle \mathrm{DOC'}$ と $\triangle \mathrm{DAF}$ は相似であり，$\angle \mathrm{OC'C''} = \dfrac{\pi}{12}$ より $\angle \mathrm{AFC'} = \dfrac{\pi}{12}$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}s &= \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{AC'}}{\mathrm{AF}} \\ &= \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{4}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる．また，$\triangle \mathrm{EOC'}$ と $\triangle \mathrm{EBF}$ は相似であるから,

$$\begin{aligned}t &= \frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EO}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{OC'}} = \frac{\mathrm{AF}-\mathrm{AB}}{\mathrm{OC'}} = \frac{\mathrm{AC'}\tan\dfrac{5\pi}{12}-\mathrm{AB}}{\mathrm{OC'}} \\ &= 2+\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

である.

別解

s, t については，$\triangle \mathrm{ODC'}$ および $\triangle \mathrm{OEC'}$ に対して正弦定理を適用することにより，線分 OD, OE の長さを直接求めてもよい.

参考

一般に鋭角三角形 OAB において，辺 AB 上に点 C，辺 OA 上に点 D，辺 OB 上に点 E をとるとき，線分の長さの和 CD + DE + EC が最小となるのは C，D，E がそれぞれ点 O，B，A から対辺に下ろした垂線の足となるときである．このときできる三角形 CDE を「垂足三角形」とよぶ．

これを利用すれば，(4) の s，t は以下のように求められる．

$$s = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BD}\tan\angle\mathrm{OBD}}{\mathrm{BD}\tan\angle\mathrm{ABD}} = \frac{\tan\frac{\pi}{12}}{\tan\frac{\pi}{4}} = 2-\sqrt{3}$$

$$t = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{OE}} = \frac{\mathrm{AE}\tan\angle\mathrm{BAE}}{\mathrm{AE}\tan\angle\mathrm{OAE}} = \frac{\tan\frac{\pi}{6}}{\tan\frac{\pi}{12}} = 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

また，一般の鋭角三角形 OAB において上のように点 C, D, E を定め，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，

$$\mathrm{OD} = \mathrm{OB}\cos\theta,\ \mathrm{OE} = \mathrm{OA}\cos\theta$$

である．よって $\mathrm{OD}:\mathrm{OE} = \mathrm{OB}:\mathrm{OA}$ なので，

$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OED}$ は相似であり，相似比は $1:\cos\theta$

であることがわかる．同様に，$\angle\mathrm{OAB} = \alpha$，$\angle\mathrm{OBA} = \beta$ とすると，

$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{CAD}$ は相似であり，相似比は $1:\cos\alpha$
$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{CEB}$ は相似であり，相似比は $1:\cos\beta$

であることもわかる．

三角形 OAB の外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$$\mathrm{AB} = 2R\sin\theta$$

また，$\theta + (\alpha+\beta) = \pi$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC} &= \mathrm{OB}\cos\alpha + \mathrm{AB}\cos\theta + \mathrm{OA}\cos\beta \\
&= 2R(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\theta\cos\theta + \sin\beta\cos\beta) \\
&= R(\sin 2\alpha + 2\sin\theta\cos\theta + \sin 2\beta) \\
&= R\{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\theta\cos\theta\} \\
&= R\{2\sin\theta\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\theta\cos(\alpha+\beta)\} \\
&= 2R\sin\theta\{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\} \\
&= 4R\sin\theta\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}} &= \frac{4R\sin\theta\sin\alpha\sin\beta}{2R\sin\theta} \\
&= 2\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

となる．これより，(4) の場合は $\dfrac{\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC}}{\mathrm{AB}} = 2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となる．

講評

$\boxed{1}$［確率］((1)(2)(3) 標準 (4) 難）2 つの箱から取り出した数を並べて作った 2 つの数の最大公約数に関する確率の問題である．解答のように $a+b$ の値に注目するなどしていくことになるが，おそらくそれ以上のうまい解法はないと思われる．すべての組み合わせが $6\times 7=42$ 通りなので，実際に 6×7 の表を書いてその場合の最大公約数を表に書き込んでいくのが結局速い．しかもそれで (1) から (4) までのすべての答が求められる．しかし，少なくとも (4) については後回しにして他の問題に手を付けるべきである．

$\boxed{2}$［2 次関数，数列］((1)(2) やや易 (3)(4) 標準）(1) は与えられた条件から微分係数がわかるので，これを利用して $f(x)$ を決定する．ここをミスするとすべての問題に影響するため慎重に計算したい．(3) は 2 次関数の対称性を利用するためグラフを利用するとよい．(4) は格子点の個数を求める問題である．共通因数でくくるなど計算は工夫したい．なお (1) については，近畿大学医学部の 2008 年後期試験でほぼ同じ出題があった．

$\boxed{3}$［ベクトル，幾何］((1)(2)(3) 標準 (4) やや難）三角形の内外分点に関するベクトルの問題としてよくある題材であるが，やや典型題とは異なる問い方をしており，戸惑った受験生は多かったのではないだろうか．(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DO}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と比較すればよい．(2)(3) メネラウスの定理を用いるのがよいだろう．(4) まず，$\triangle\mathrm{OAC}$, $\triangle\mathrm{OBC}$ が有名直角三角形であることに気づいておきたい．その際に，$\mathrm{CB}=k$ とおくと，他の線分の長さが比較的きれいな数値で表せるだろう．折れ線の長さ $\mathrm{CD}+\mathrm{DE}+\mathrm{EC}$ の最小値を求める場合には点 C の対称点を考えるのが基本である．このとき，C の OA に関する対称点を C' とすると，OC' と AB が平行であることに気づけば相似比により s, t を求められる．あるいは正弦定理を利用するか，xy 平面に座標を設定してもよい．

昨年度前期と比べ，難易度に大きな変化はなく，制限時間に対しての作業量が多いのも相変わらずである．$\boxed{1}$(1)〜(3)，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$(1)〜(3) をどれだけ正確に解き切れたかの勝負となるだろう．目標は 60%.