解答速報

関西医科大学（後期）　数学

2021年 2月27日実施

I　(1)〜(3) の $\boxed{}$ の中にあてはまる，数，角度，整式，不等式，記号，語句，図などを指定欄に記入せよ。（なお本設問は，指定欄には答えだけを記入すること。）

(1)　次の式を因数分解せよ。

$(x^2-15x-2)(x^2+15x-2)-5x^2+2021=\boxed{\text{ア}}$

(2)　半径 4 の円 C の円周上の点 H における接線を引き，その接線上に $\mathrm{AH}=7$ となる点 A をとる。ここで点 A を通る直線が，円 C と 2 点 P と B で交わり，線分 AP 上に B があるとする。$\angle\mathrm{BPH}=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，以下の値を求めよ。

$\mathrm{BH}=\boxed{\text{イ}}$，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ウ}}$，$\mathrm{AP}=\boxed{\text{エ}}$。

$\triangle\mathrm{ABH}$ の面積は $\boxed{\text{オ}}$ であり，$\triangle\mathrm{APH}$ の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3)　20 人の学生が 2 回の試験を受験した。1 回目の試験は 10 点満点で，2 回目の試験は 20 点満点である。これらの試験得点に対し，1 回目の試験得点を 4 倍，2 回目の試験得点を 3 倍に換算した試験得点を計算し，これらの得点の合計から 100 点満点の総合得点を算出した。下の表は，元の試験得点，換算した試験得点，総合得点から計算された数値をまとめたものである。表には，それぞれの得点から計算された，平均値，中央値，分散，標準偏差と，1 回目の試験得点と 2 回目の試験得点から計算された共分散と相関係数を記入する欄がある。

下の表中の $\boxed{\text{キ}}$ 〜 $\boxed{\text{タ}}$ に入る数値を求めよ。なお，表に示された数値だけでは求められない場合は，数値ではなく×を記入すること。

注意：表の一部の数値は（　）として，意図的に記入していない。

	元の試験得点		換算した試験得点		総合得点
	1 回目	2 回目	1 回目	2 回目	
平均値	6	11	$\boxed{\text{ケ}}$	33	$\boxed{\text{セ}}$
中央値	6.5	11.5	26	$\boxed{\text{コ}}$	$\boxed{\text{ソ}}$
分散	9	25	$\boxed{\text{サ}}$	（　）	$\boxed{\text{タ}}$
標準偏差	$\boxed{\text{キ}}$	（　）	（　）	$\boxed{\text{シ}}$	（　）
共分散	13.5		（　）		
相関係数	$\boxed{\text{ク}}$		$\boxed{\text{ス}}$		

解答

(1)　ア．$(x-3)(x+3)(x-15)(x+15)$

(2)　イ．$4\sqrt{2}$　ウ．5　エ．$\dfrac{49}{5}$　オ．14　カ．$\dfrac{686}{25}$

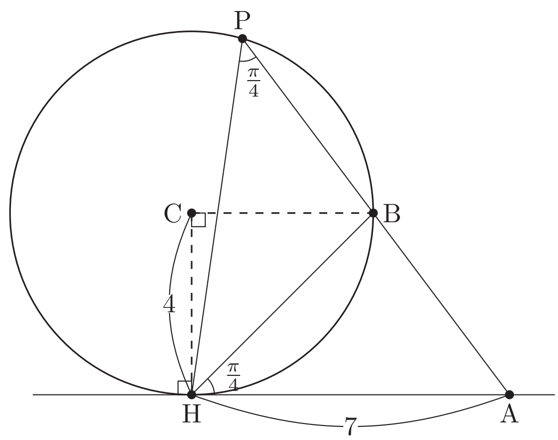
(3)　キ．3　ク．0.9　ケ．24　コ．34.5　サ．144　シ．15　ス．0.9　セ．57　ソ．×　タ．693

解説

(1)

$$
\begin{aligned}
&(x^2-15x-2)(x^2+15x-2)-5x^2+2021\\
&=(x^2-2)^2-225x^2-5x^2+2021\\
&=(x^2-2)^2-230(x^2-2)+1561\\
&=(x^2-2)^2-230(x^2-2)+7\cdot 223\\
&=(x^2-2-7)(x^2-2-223)\\
&=(x^2-3^2)(x^2-15^2)\\
&=\boldsymbol{(x-3)(x+3)(x-15)(x+15)}
\end{aligned}
$$

(2)　円の中心を C とする．$\angle\mathrm{BPH}=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$\angle\mathrm{HCB}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\triangle$HCB は直角二等辺三角形であることがわかるので $\mathrm{BH}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$ である．また，接弦定理により $\angle\mathrm{AHB}=\dfrac{\pi}{4}$ がわかるので，$\triangle$AHB に余弦定理を用いると



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2&=\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2-2\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}\cos\frac{\pi}{4}\\
&=7^2+(4\sqrt{2})^2-2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&=25
\end{aligned}
$$

となるので，$\mathrm{AB}=\mathbf{5}$ である．
次に，方べきの定理により

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AH}^2 \iff 5\mathrm{AP}=7^2$$

であるから，$\mathrm{AP}=\boldsymbol{\dfrac{49}{5}}$ である．また，

$$
\begin{aligned}
\triangle\mathrm{AHB}&=\frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}\sin\frac{\pi}{4}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&=\mathbf{14}
\end{aligned}
$$

である．$\triangle$AHB と $\triangle$APH は相似であり，その相似比は $\mathrm{AH}:\mathrm{AP}=7:\dfrac{49}{5}=5:7$ であるから，

$$\triangle\mathrm{APH}=\left(\frac{7}{5}\right)^2\triangle\mathrm{ABH}$$

$$= \frac{49}{25} \cdot 14$$
$$= \boldsymbol{\frac{686}{25}}$$

である.

(3) 元の試験の 1 回目の得点を x_k，2 回目の得点を y_k とし，1 回目の換算得点を u_k，2 回目の換算得点を v_k とする．ただし，$k = 1, 2, 3, \cdots, 20$ とする．題意より，$u_k = 4x_k$，$v_k = 3y_k$ である．以下，データ X について，$\overline{X}$ を X の平均，${s_X}^2$ を X の分散，s_X を X の標準偏差，2 つのデータ X, Y について，s_{XY} を X, Y の共分散，r_{XY} を X, Y の相関係数とする.

(i) 元の試験得点について，

1 回目の標準偏差は $s_x = \sqrt{9} = \mathbf{3}$ であり，相関係数は $r_{xy} = \dfrac{13.5}{3 \cdot 5} = \mathbf{0.9}$ である.

(ii) 換算した試験得点について，

1 回目の平均値は $\overline{u} = 4\overline{x} = \mathbf{24}$ である．2 回目の中央値は，換算してもデータの大小関係は変化しないので，元の試験得点の中央値を 3 倍すればよい．したがって，$11.5 \cdot 3 = \mathbf{34.5}$.

また，1 回目の分散は ${s_u}^2 = 16{s_x}^2 = 16 \cdot 9 = \mathbf{144}$ であり，2 回目の分散は ${s_v}^2 = 9{s_y}^2 = 9 \cdot 25 = 225$ である．よって，2 回目の標準偏差は $s_v = \mathbf{15}$．相関係数は，$r_{uv} = r_{xy} = \mathbf{0.9}$ である.

(iii) 総合得点について，

平均値は，換算したデータの和で得られるため，(総合得点の平均値) $= 24 + 33 = \mathbf{57}$.

一方，中央値は全体の中央値がこれらのデータからは求められないため**×**.

例えば,

1 回目	2	2	2	2	3	3	4	4	5	5	8	8	8	8	8	8	10	10	10	10
2 回目	3	3	3	3	10	10	10	10	11	11	12	12	12	12	12	12	17	17	20	20
総合得点	17	17	17	17	42	42	46	46	53	53	68	68	68	68	68	68	91	91	100	100

であった場合の総合得点の中央値は 60.5 であるが,

1 回目	1	1	3	3	3	3	3	4	6	6	7	7	9	9	9	9	9	9	9	10
2 回目	1	1	4	4	9	9	11	10	10	11	14	14	12	12	16	16	16	16	17	17
総合得点	7	7	24	24	39	39	45	46	54	57	70	70	72	72	84	84	84	84	87	91

であった場合の総合得点の中央値は 63.5 である.

総合得点の分散を Z とすると，

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\{(4x_k + 3y_k) - (4\overline{x} + 3\overline{y})\}^2 \\
&= \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\{4(x_k - \overline{x}) + 3(y_k - \overline{y})\}^2 \\
&= \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}\{16(x_k - \overline{x})^2 + 24(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) + 9(y_k - \overline{y})^2\} \\
&= 16 \cdot \underbrace{\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}(x_k - \overline{x})^2}_{x\text{ の分散}} + 24 \cdot \underbrace{\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}_{x\text{ と }y\text{ の共分散}} + 9 \cdot \underbrace{\frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20}(y_k - \overline{y})^2}_{y\text{ の分散}} \\
&= 16 \cdot 9 + 24 \cdot 13.5 + 9 \cdot 25 \\
&= \mathbf{693}
\end{aligned}
$$

II　x を実数とし，$f(x)=\cos(\sin x)$, $g(x)=\sin(\cos x)$ と定める。以下の設問に答えよ。

(1)　$\cos A-\sin B=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A+B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{A-B}{2}\right)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減と周期を調べ，大小関係がわかるようにグラフを描け。ただし，変曲点を調べる必要はない。

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A-B}{2}\right)\\
&= \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
&\quad -\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
&= \cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\\
&= \cos A-\sin B=(\text{左辺})
\end{aligned}
$$

(証明終)

別解 1

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)\\
&= \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
&\quad -\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\
&= \cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)-\sin\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\\
&= -\left(\sin\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\left(\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\\
&= -\sqrt{2}\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

(証明終)

別解 2

$$
(\text{右辺})=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{A+B}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)
$$

$$= \cos A - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$
$$= \cos A - \sin B = (\text{左辺})$$

（証明終）

(2)　(1) の結果を用いると，

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x)$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\}\sin\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}\cdots①$$

ここで，

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\pi - 2\sqrt{2}) > \frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2}) > 0$$
$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\pi + 2\sqrt{2}) < \frac{1}{4}(\pi + 3) < \frac{1}{4}(\pi + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

より，

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$$

となり，同様に

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$$

となる．ゆえに

$$\sin\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right\} > 0$$

$$\sin\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} > 0$$

となるので，① より $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ が成り立つ．

（証明終）

(3)　$f(x + \pi) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$ より，$f(x)$ は π を周期にもつ．そこで $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減を調べる．

$$f'(x) = -\sin(\sin x)\cos x$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のときに $0 \leqq \sin x \leqq 1\,(< \pi)$ であるので，$\sin(\sin x) \geqq 0$ であることを考慮すると，増減表は次のようになる．

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	↘	$\cos 1$	↗	1

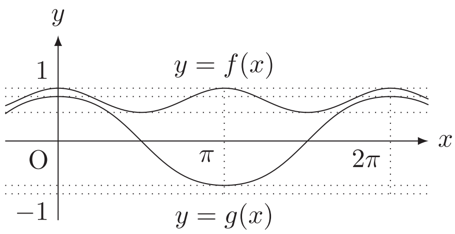
また，$g(x + 2\pi) = \sin(\cos x) = g(x)$ より，$g(x)$ は 2π を周期にもつ．そこで $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $g(x)$ の増減を調べる．

$$g'(x) = \cos(\cos x)(-\sin x) = -\cos(\cos x)\sin x$$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のときに $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\right)-1 \leqq \cos x \leqq 1\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるので，$\cos(\cos x)>0$ であることを考慮すると，増減表は次のようになる．

x	0		π		2π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$\sin 1$	$\searrow$	$-\sin 1$	$\nearrow$	$\sin 1$

(2) より $f(x)>g(x)$ であり，$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos 1<\sin 1$ であることを考慮すると，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは次のようになる．



Ⅲ　数列 $\{a_n\}$ を次のように定めるとき，以下の設問に答えよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 1 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_1，a_2，a_3 を求め，2 進法で表せ。(答えだけを指定欄に記入すること。)

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　a_n は，初項 1 の等比数列 $\{b_n\}$ を用いて $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k$ と表すことができる。$\{b_n\}$ の一般項を求め，m を n を用いて表せ。ただし，数列 $\{b_n\}$ の公比は 1 よりも大きい整数とする。

(4)　a_n を 2 進法で表したときの桁数と 0 の個数を，どちらも n を用いて表せ。

解答

(1)　$a_1 = 1_{(2)}$，$a_2 = 101_{(2)}$，$a_3 = 10101_{(2)}$

(2)　$a_{n+1} + \dfrac{1}{3} = 4\left(a_n + \dfrac{1}{3}\right)$ より，$a_n + \dfrac{1}{3} = \left(a_1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdot 4^{n-1} = \dfrac{4^n}{3}$.

したがって，$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4^n - 1}{3}}$.

(3)　$\{b_n\}$ の公比は 1 より大きい整数なので，公比を r とおくと $b_n = r^{n-1}$ $(r \geqq 2)$ と表される.

$a_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k$ とすると $5 = 1 + r + \cdots + r^{m-1}$ となる m が存在するはずであるが，$1 + r + r^2 \geqq 1 + 2 + 4 = 7$ だから $m \geqq 3$ ではありえない．$m = 1$ でもあり得ないから $m = 2$ であり，$5 = 1 + r$ つまり $r = 4$ とわかる.

その場合 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} b_k = \dfrac{4^m - 1}{4 - 1} = \dfrac{1}{3}(4^m - 1)$ であるから $a_n = b_m \iff n = m$ である.

答は $\boldsymbol{b_n = 4^{n-1}}$，$\boldsymbol{m = n}$.

(4)　前問より，

$a_n = 1 + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n-2}$ となるので，a_n を 2 進法で表すと，1 の位，2^2 の位，2^4 の位，$\cdots$，2^{2n-2} の位に 1 が入る．したがって，**桁数は $\boldsymbol{2n-1}$，0 の個数は $\boldsymbol{n-1}$** である.

参考

a_n を 4 倍するとは，2 進法では $100_{(2)}$ 倍することであり，2 桁左にずらすことになる（左シフト）．よって，$a_{n+1} = 4a_n + 1$ を 2 進法で考えると，「a_n を 2 桁左シフトし，1 の位に 1 を加える」という操作で a_{n+1} が得られる．したがって，数列 $\{a_n\}$ を 2 進法で表すと，

$$1,\ 101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101,\ \cdots$$

となる.

Ⅳ　座標空間内に，4 点 A$(2,\ 0,\ 2)$, B$(-1,\ 1,\ 0)$, C$(-1,\ -1,\ 0)$, D$(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする四面体 ABCD がある。実数 t （ただし，$0<t<1$）を用いて，線分 AB と線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を，それぞれ P, Q とおく。P, Q を通り，xy 平面に垂直な平面を α とし，四面体 ABCD を α で切ったときの断面（切り口）の面積を $f(t)$ とする。以下の設問に答えよ。

(1)　$f(t)$ の最大値 S と，そのときの t を求めよ。

(2)　(1) のとき，α が四面体 ABCD を切った 2 つの立体のうち，頂点 A を含む方の立体の体積 V を求めよ。

解答

(1)　点 P, Q はそれぞれ AB, AC を $t:1-t$ に内分する点なので，

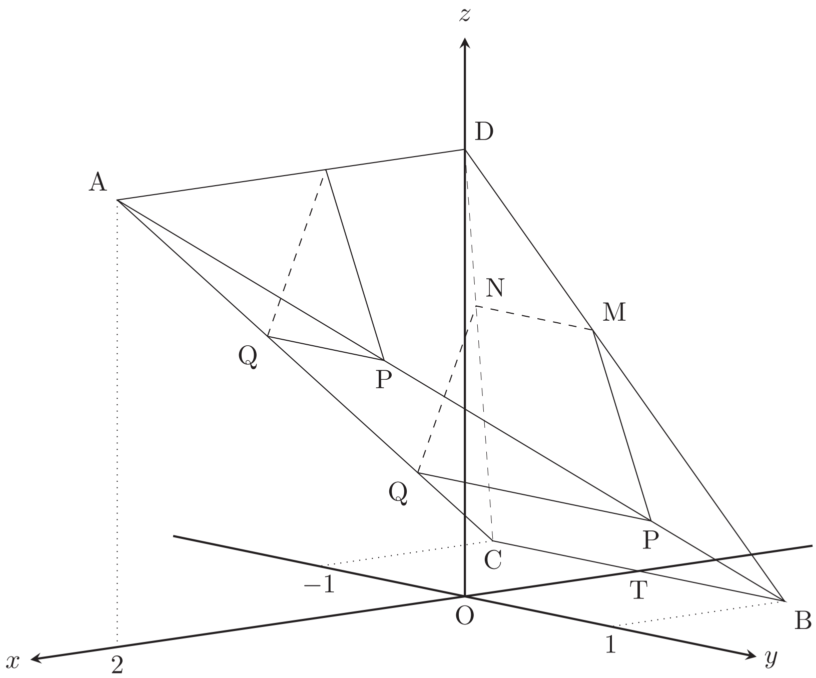
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 0,\ 2)+t(-3,\ 1,\ -2)=(2-3t,\ t,\ 2-2t),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 0,\ 2)+t(-3,\ -1,\ -2)=(2-3t,\ -t,\ 2-2t)$$

となる．よって，平面 $\alpha : x=2-3t \cdots ①$ である．

$x \geqq 0$ すなわち $0<t \leqq \dfrac{2}{3}$ の範囲で $f(t)$ が単調増加するのは明らか．

$x \leqq 0$ すなわち $\dfrac{2}{3} \leqq t<1$ のとき，線分 DB, DC と平面 α の交点をそれぞれ M, N とする．



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(0,\ 0,\ 2)+s(-1,\ 1,\ -2)=(-s,\ s,\ 2-2s)$$

とおくと，$x=2-3t$ なので，$-s=2-3t$ すなわち $s=-2+3t$.

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(2-3t,\ -2+3t,\ 6-6t)$.

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(2-3t,\ 2-3t,\ 6-6t)$.

断面は図のような台形であり，$\mathrm{MN}=6t-4$, $\mathrm{PQ}=2t$，高さは M, P の z 座標の差 $4-4t$ であるから，

$$f(t)=\frac{1}{2}(6t-4+2t)(4-4t)=8(2t-1)(1-t)=-16\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+1$$

よって，$f(t)$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{3}{4}}$ で最大値をとり，$\boldsymbol{S=1}$.

(2) 四面体 ABCD は，zx 平面について対称であり，辺 BC と x 軸の交点を T とすると，四面体 ABCD の体積を V_0 として，

$$V_0 = 2 \times \text{四面体 ABTD} = 2 \times \frac{1}{3} \times \triangle\text{ADT} \times 1 = \frac{4}{3}$$

求める立体の体積は，① より，$dx = -3dt$ であることに注意して，$t = 1,\ \dfrac{3}{4}$ に対応する x の値を x_1，x_2 とすると

$$V = V_0 - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dx = \frac{4}{3} - \int_{1}^{\frac{3}{4}} 8(2t-1)(1-t)(-3)dt$$

となる．ここで，2 次関数 $f(t)$ の軸が $t = \dfrac{3}{4}$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\frac{3}{4}} 8(2t-1)(1-t)(-3)dt &= -48\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)dt \\ &= -48 \times \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)dt \\ &= 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$V = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

A を含まない方の立体の体積については，「断頭三角柱」の考え方を用いて

(底面積) × (3 点の高さの平均)

で求めることができる．xz 平面で切った断面を底面とすると，その面積が $\dfrac{3}{8}$，また M, P, B について xz 平面からの距離の平均が $\dfrac{2}{3}$ と求まるので，この立体のうち $y \geqq 0$ の部分の体積は $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{4}$．したがってこの立体の体積は $\dfrac{1}{4} \times 2 = \dfrac{1}{2}$ である．

講評

Ⅰ［小問集合］((1) 標準 (2) 標準 (3) やや難）(1) は 4 次式の因数分解であり，複 2 次式となるためたすきがけを利用すれば因数分解することができる．係数が大きいためやや苦労したかもしれない．(2) は図形の計量で余弦定理，面積，方べきの定理，接弦定理など様々な定理を利用する総合的な問題である．△APH は直接求めるのではなく相似比を利用する．(3) はデータの分析の問題で表を埋めていく形式である．変量変換した際の処理ができるかを問うており，分散の総合得点は分散の和ではないことに注意したい．

Ⅱ［三角関数・数Ⅲ微分］（やや難）$f(x)=\cos(\sin x)$，$g(x)=\sin(\cos x)$ に関する問題．$y=\sin x$ や $y=\cos x$ のグラフには馴染みがあるが角度の部分に三角関数が入った題材はおそらくほとんど経験したことのない人が多かっただろう．(1) はいろいろな解法があるがスタンダードに右辺を加法定理で展開していくと無難だろう（和積をうまく用いる方法もある）．(2) は (1) の結果をしっかりと用いて解答したい．結果に代入して合成すれば角度の範囲がわかるため証明できる．しかし違和感を感じた人も多かっただろう．(3) は微分して増減表を書くだけである．周期についてはは x の代わりに $x+k\pi$ や $x+2k\pi$ を代入して一致するものを探そう．

Ⅲ［数列・整数（N 進法）］（標準）(1)(2) は基本問題．取りこぼしてはいけない．(3) は，(2) の結果と比較することで m, r の値をすぐに見つけることはできるが，このような m, r が一意に定まることを示さなければ完全な答案とはならない．ここの議論ができたかどうかで大きく差がついただろう．(4) 例えば 10 進数の場合，ある数を 100 倍すると各桁の数値が 2 桁左にずれることは常識だろう．2 進数の場合には $4=100_{(2)}$ 倍することで同様のことが起こる．この感覚を持っている人はスムーズに解けただろう．

Ⅳ［数学Ⅲの微積分］（やや難）(1) 平面 α による切断面は xy 平面に「垂直」であることに注意．α の x 座標が正か負かで切断面の形状が変わるので，場合分けをして断面積を求めることになる．(2) 以降はいつも通り積分して体積計算をすればよいのだが，断面積は t の関数で表されているのに対して積分方向は x 軸方向であるために，dx から dt に変数変換する必要がある．うっかり $\int f(t)dt$ としてしまった受験生は多かったのではないだろうか．

2021 年前期と同様に，空所補充が約 3 割，記述が約 7 割という混合形式となっている．難易度は 2021 年前期と比較すると大きく難化している．目標は 60%.