解答速報

関西医科大学（前期）　数学

2021年 1月30日実施

I　(1)〜(3) の $\boxed{}$ の中にあてはまる，数，角度，整式，不等式，記号，語句，図などを指定欄に記入せよ。（なお本設問は，指定欄には答えだけを記入すること。）

(1)　△OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{AB}=\sqrt{21}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。△OAB の外心を P，垂心を H とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{a}+\boxed{\text{イ}}\,\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{b}$ と表すことができる。

また，線分 PH を $1:2$ に内分する点 D について，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boxed{\text{オ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$ と表せることから，点 D は △OAB の $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2)　$x^2-|x|y+y^2=3$ を満たす整数解 (x,y) をすべて求めると $\boxed{\text{ク}}$ である。求めた整数解を xy 平面上に図示すると，$\boxed{\text{ケ}}$ となる。

(3)　ある病気にかかっているかどうかを判定する検査があり，検査結果は陽性か陰性かのどちらかである。この検査は，病気にかかっている人が陽性と判定される確率が $\dfrac{3}{4}$ であり，病気にかかっていない人が陰性と判定される確率が $\dfrac{19}{20}$ である。ここで，A 地域でこの病気にかかっている人の割合は全体の $\dfrac{1}{56}$ であるが，B 地域でこの病気にかかっている人の割合はわかっていないとする。

A 地域の住民から無作為に選ばれた被験者にこの検査を行う場合，検査結果が陽性となる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。さらに，検査で陽性と判定されたときに，実際に病気にかかっている確率は $\boxed{\text{サ}}$ である。

B 地域の住民から無作為に選ばれた被験者にこの検査を行う場合，検査結果が陽性となる確率は $\dfrac{3}{20}$ であった。このとき，B 地域の住民でこの病気にかかっている人の割合は $\boxed{\text{シ}}$ であり，検査で陽性と判定されたときに，実際に病気にかかっている確率は $\boxed{\text{ス}}$ である。

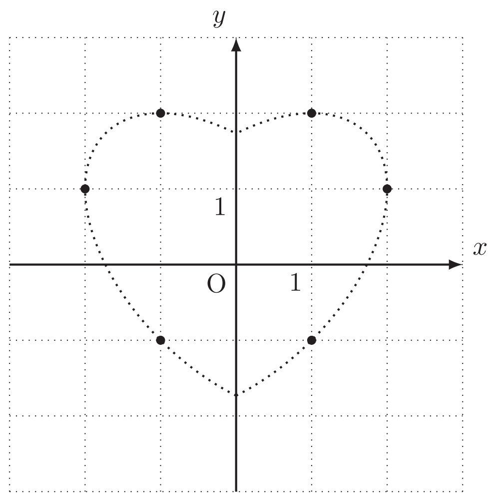
なお，この設問の解答は既約分数で表すこと。

解答

(1)　ア．$\frac{2}{5}$　イ．$\frac{1}{4}$　ウ．$\frac{1}{5}$　エ．$\frac{1}{2}$　オ．$\frac{1}{3}$　カ．$\frac{1}{3}$　キ．重心

(2)　ク．$(2,1),\ (1,2),\ (-1,2),\ (-2,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$

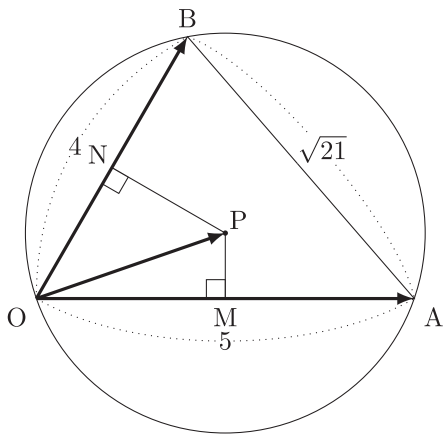
ケ．



(3)　コ．$\frac{1}{16}$　サ．$\frac{3}{14}$　シ．$\frac{1}{7}$　ス．$\frac{5}{7}$

解説

(1)　辺 OA, OB の中点をそれぞれ M, N とする．



$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=21 \iff |\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=21$$
$$\iff |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=21$$
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{25}{2}$ より，

$$\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{25}{2} \iff s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{25}{2}$$
$$\iff 10s+4t=5\ \cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=8$ より，

$$\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=8 \iff s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=8$$
$$\iff 5s+8t=4\ \cdots ②$$

①, ② を解くと，$s=\frac{2}{5}$，$t=\frac{1}{4}$ であるから，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}}$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，

$$\left(u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0 \iff u\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-u|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+v|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-v\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$\iff 5u = 2v \ \cdots ③$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より，

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 &\iff \left(u\overrightarrow{\mathrm{OA}} + v\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \\ &\iff \left((u-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \\ &\iff 10(u-1) + 16v = 0 \\ &\iff 5u + 8v = 5 \ \cdots ④\end{aligned}$$

③, ④ を解くと，$u = \dfrac{1}{5}$, $v = \dfrac{1}{2}$ であるから，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}}$ である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OH}}}{1+2} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}\end{aligned}$$

よって点 D は △OAB の **重心** である．

(2)　$x^2 = |x|^2$ に注意すると，与式から

$$\left(|x| - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 3 \iff (2|x| - y)^2 + 3y^2 = 12$$

となる．$(2|x| - y)^2 \geqq 0$ なので，整数 y のとり得る値は，$y = 0$, ± 1, ± 2 である．

(i)　$y = 0$ のとき，$x^2 = 3$ より，これを満たす整数 x は存在しない．

(ii)　$y = 1$ のとき，$(2|x| - 1)^2 = 9$ より，これを満たす整数 x は，$x = -2$, 2 である．

(iii)　$y = -1$ のとき，$(2|x| + 1)^2 = 9$ より，これを満たす整数 x は，$x = -1$, 1 である．

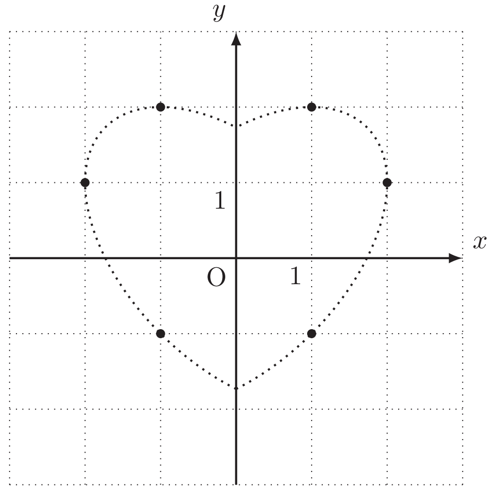
(iv)　$y = 2$ のとき，$(2|x| - 2)^2 = 0$ より，これを満たす整数 x は，$x = -1$, 1 である．

(v)　$y = -2$ のとき，$(2|x| + 2)^2 = 0$ より，これを満たす整数 x は存在しない．

以上より，求める整数解は，

$$(x, y) = (-2, 1),\ (2, 1),\ (-1, -1),\ (1, -1),\ (-1, 2),\ (1, 2)$$

であり，図示すると次のようになる（ただし，太点線は与えられた方程式で表されるグラフを表している）．



(3)　次のように事象 $X,\ Y$ を定める．

X：検査で陽性と判定される．

Y：実際に病気にかかっている．

このとき，$P_Y(X)=\dfrac{3}{4}$，$P_Y(\overline{X})=\dfrac{1}{4}$，$P_{\overline{Y}}(X)=\dfrac{1}{20}$，$P_{\overline{Y}}(\overline{X})=\dfrac{19}{20}$ である．

$P(Y)=\dfrac{1}{56}$ より，検査結果が陽性になる確率 $P(X)$ は，

$$\begin{aligned} P(X) &= P(Y)P_Y(X)+P(\overline{Y})P_{\overline{Y}}(X) \\ &= \frac{1}{56}\cdot\frac{3}{4}+\frac{55}{56}\cdot\frac{1}{20} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

検査が陽性と判定されたときに，実際に病気にかかっている確率 $P_X(Y)$ は，

$$\begin{aligned} P_X(Y) &= \frac{P(X\cap Y)}{P(X)} \\ &= \frac{P(Y)\cdot P_Y(X)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{1}{56}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{14}} \end{aligned}$$

次に，B 地域について考える．検査結果が陽性と判定される確率が $P(X)=\dfrac{3}{20}$ であることから，B 地域の住民でこの病気にかかっている人の割合 $P(Y)$ について，

$$P(Y)\cdot P_Y(X)+(1-P(Y))P_{\overline{Y}}(X)=\frac{3}{20} \iff \frac{3}{4}P(Y)+\frac{1}{20}(1-P(Y))=\frac{3}{20}$$

が成り立つ．これより，$P(Y)=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$ である．検査で陽性と判定されたときに，実際に病気にかかっている確率 $P_X(Y)$ は，

$$\begin{aligned} P_X(Y) &= \frac{P(X\cap Y)}{P(X)} \\ &= \frac{P(Y)\cdot P_Y(X)}{P(X)} \\ &= \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{20}} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

II　複素数 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，複素数 $\beta,\ \gamma$ を
$\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4,\ \gamma = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ とする。以下の設問に答えよ。
(1)　$\beta + \gamma,\ \beta\gamma$ の値を求めよ。
(2)　$\beta,\ \gamma$ の値を求めよ。
(3)　$\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ および $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$\alpha^7 = 1 \cdots ①$ であるから，α は 1 の 7 乗根のうちのひとつである．ここで，

$$\alpha^7 = 1 \iff (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

であるが，α は虚数なので $\alpha - 1 \fallingdotseq 0$ より

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \cdots ②$$

が成り立つ．①, ② を用いると，

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 \\ &= \mathbf{-1} \\ \beta\gamma &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{10} \\ &= \alpha^4 + \alpha^6 + 1 + \alpha^5 + 1 + \alpha + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

となる．

(2)　(1) より解と係数の関係から，$\beta,\ \gamma$ は 2 次方程式

$$t^2 + t + 2 = 0$$

の 2 解であり，これを解くと $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ となる．ここで，$\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ の虚部は

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$$

であるが，積→和の公式を用いると

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$

となり，この値は正であることがわかるので，
$\beta = \mathbf{\dfrac{-1 + \sqrt{7}i}{2}}$, $\gamma = \mathbf{\dfrac{-1 - \sqrt{7}i}{2}}$ である．

(3)　まず，(2) の議論により，

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \mathbf{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

である．次に，$\theta = \dfrac{2\pi}{7}$ とおく．$7\theta = 2\pi$ であることに注意しておく．
積→和の公式等を繰り返し用いると，

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\frac{3\theta}{2}\\
&=-\frac{1}{2}(\cos 2\theta-\cos\theta)\sin\theta\\
&=-\frac{1}{2}(\sin\theta\cos 2\theta-\sin\theta\cos\theta)\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}\\
&=-\frac{1}{4}(\sin 3\theta-\sin\theta-\sin 2\theta)\\
&=-\frac{1}{4}\{\sin(2\pi-4\theta)-\sin\theta-\sin 2\theta\}\\
&=-\frac{1}{4}(-\sin 4\theta-\sin\theta-\sin 2\theta)\\
&=\frac{1}{4}(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 4\theta)\\
&=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}
$$

となる．

$\boxed{\text{別解 1}}$

$\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^6$ はすべて $z^7=1$ を満たし，かつ虚数であることから

$$(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^6)=z^6+z^5+\cdots+z+1\cdots③$$

が成り立つ．ここで，

$$
\begin{aligned}
|1-(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)|&=|2\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta|\\
&=|-2i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)|\\
&=2|\sin\theta|
\end{aligned}
$$

を利用すると $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ に対して

$$\left|1-\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)\right|=2\sin\frac{k\pi}{7}\cdots④$$

が成り立つことがわかる．③ の両辺に $z=1$ を代入すると

$$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^6)=7$$

であり，ここで両辺の絶対値をとり，④を利用して左辺を変形すると

$$2^6\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\cdots\sin\frac{6\pi}{7}=7$$

となる．ここで，$\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}>0$, $\sin\frac{5\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}>0$, $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}>0$ であることを利用すると，

$$2^6\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2=7$$

より

$$\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{8}}$$

である．

$\boxed{\text{別解 2}}$

$\theta=\dfrac{2\pi}{7}$ とおくと，$7\theta=2\pi \iff 2\pi-4\theta=3\theta$ であるから，このとき

$$\sin(2\pi-4\theta)=\sin 3\theta \iff -\sin 4\theta=\sin 3\theta$$

が成り立つ．同様に $\theta=\dfrac{4}{7}\pi,\ \dfrac{6}{7}\pi$ も $-\sin 4\theta=\sin 3\theta$ を満たしている．ここで，$-\sin 4\theta=\sin 3\theta$ は $\sin\theta(8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1)=0$ を満たすが，$\theta=\dfrac{2\pi}{7},\ \dfrac{4\pi}{7},\ \dfrac{6\pi}{7}$ のいずれの場合も $\sin\theta \fallingdotseq 0$ であるから，$\theta=\dfrac{2}{7}\pi,\ \dfrac{4}{7}\pi,\ \dfrac{6}{7}\pi$ は

$$8\cos^3\theta+4\cos^2\theta-4\cos\theta-1=0$$

の解，すなわち，$x=\cos\dfrac{2}{7}\pi,\ \cos\dfrac{4}{7}\pi,\ \cos\dfrac{6}{7}\pi$ は $8x^3+4x^2-4x-1=0$ の（異なる）3 解であることがわかる．したがって，

$$8x^3+4x^2-4x-1=8\left(x-\cos\frac{2}{7}\pi\right)\left(x-\cos\frac{4}{7}\pi\right)\left(x-\cos\frac{6}{7}\pi\right)$$

と因数分解される．$x=1$ を代入して

$$\begin{aligned}7&=8\left(1-\cos\frac{2}{7}\pi\right)\left(1-\cos\frac{4}{7}\pi\right)\left(1-\cos\frac{6}{7}\pi\right)\\&=8\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{7}\cdot 2\sin^2\frac{2\pi}{7}\cdot 2\sin^2\frac{3\pi}{7}\\&=64\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2\end{aligned}$$

を得る．$\sin\dfrac{\pi}{7},\ \sin\dfrac{2\pi}{7},\ \sin\dfrac{3\pi}{7}$ はすべて正であるから $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{8}}$ であることがわかる．

III　数列 $\{a_n\}$ を次のように定めるとき，以下の設問に答えよ。

$$a_1 = \frac{1}{13},\quad 5a_{n+1} = 10a_n - a_{n+1}a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。(答えだけを既約分数で指定欄に記入すること。)

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とするとき，α の値を求め，$a_m = \frac{\alpha}{2}$ となる整数 m の値を求めよ。

(4)　(3) で求めた $\alpha,\ m$ を用いて，$1 \leqq k < m$ を満たす整数 k について $a_{m-k} + a_{m+k} = \alpha$ が成り立つことを示し，$\frac{1}{2m-1}\sum_{i=1}^{2m-1} a_i$ を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)　$a_2 = \frac{5}{33},\ a_3 = \frac{5}{17},\ a_4 = \frac{5}{9}$

(2)　与漸化式を変形すると，

$$10a_n = (a_n + 5)a_{n+1}$$

$a_n \fallingdotseq 0$ とすると，$(a_n+5)a_{n+1} \fallingdotseq 0$ より $a_{n+1} \fallingdotseq 0$ となるので，任意の自然数 n で $a_n \fallingdotseq 0$ であることが帰納的に言える．この式の両辺を $10a_{n+1}a_n$ で割ると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{a_n + 5}{10a_n} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{2a_n} \\ \iff \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} - \frac{1}{5} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{64}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{5\cdot 2^{n-7}} \\ \iff \qquad \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{5\cdot 2^{n-7}} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1 + 2^{n-7}}{5\cdot 2^{n-7}} \\ \iff \qquad \boldsymbol{a_n} &= \boldsymbol{\frac{5\cdot 2^{n-7}}{1 + 2^{n-7}}} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{2^{n-7}} + 1} = 5$$

より $\boldsymbol{\alpha = 5}$ である．

$$a_m = \frac{5\cdot 2^{m-7}}{1 + 2^{m-7}} = \frac{5}{2} \iff 2^{m-7} = 1$$

より，$\boldsymbol{m=7}$ である．

(4)

$$
\begin{aligned}
a_{7-k}+a_{7+k} &= \frac{5\cdot 2^{-k}}{1+2^{-k}}+\frac{5\cdot 2^{k}}{1+2^{k}} \\
&= \frac{5}{2^{k}+1}+\frac{5\cdot 2^{k}}{1+2^{k}} \\
&= \frac{5(1+2^{k})}{1+2^{k}} \\
&= 5 \qquad \text{（証明終）}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
a_7 &= \frac{5}{2} \\
a_6+a_8 &= 5 \\
a_5+a_9 &= 5 \\
a_4+a_{10} &= 5 \\
a_3+a_{11} &= 5 \\
a_2+a_{12} &= 5 \\
a_1+a_{13} &= 5
\end{aligned}
$$

の辺々を足すと，

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12}+a_{13}=\frac{65}{2}$$

となるので，

$$\frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}a_i=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

である．

Ⅳ　次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を D とするとき，以下の設問に答えよ。

$$x = 2\cos\theta,\ y = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}|\cos\theta| \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

(1)　D の概形を図示せよ。その際，x 軸との交点，y 軸との交点の座標がそれぞれわかるようにせよ。ただし，変曲点を調べる必要はない。

(2)　D で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　D で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

(1)　$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta = 0$ を解くと $\theta = 0,\ \pi$ である．また y については，

(i)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$y = \dfrac{3}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ なので，

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$$

となる．$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ を解くと $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$y = \dfrac{3}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ なので，

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

となる．$\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ を解くと $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$.

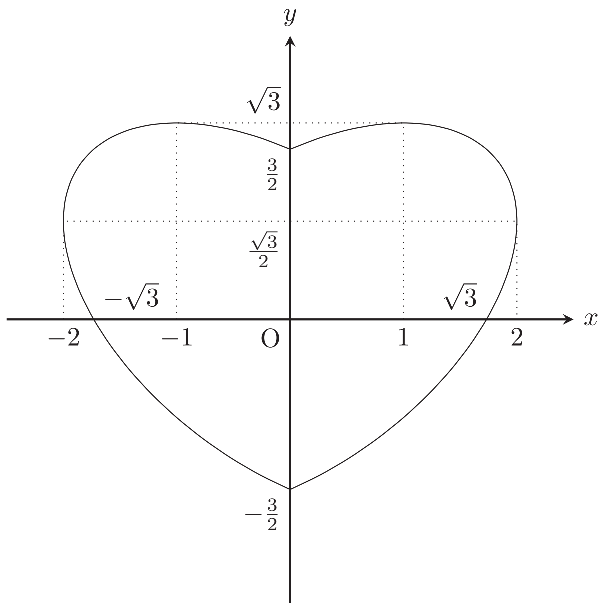
以上から，グラフの増減は以下の通りとなる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$
(x,y)	$(2,\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\nwarrow$	$(1,\sqrt{3})$	$\swarrow$	$(0,\frac{3}{2})$	$\nwarrow$	$(-1,\sqrt{3})$	$\swarrow$	$(-2,\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\searrow$	$(0,-\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$(2,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$y = 0$ を解くと $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$，よって $x = -\sqrt{3}$.

$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$y = 0$ を解くと $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$，よって $x = \sqrt{3}$.

以上からグラフは次のようになる．



注釈

実はこのグラフは，問題 I (2) で与えられた方程式で表されるグラフを，y 軸方向に $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍したものである．

(2) x，y ともに周期は 2π である．よって，$\dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi$ のときと $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < 0$ のときのグラフは等しい．

次に，グラフの対称性について調べる．$x(\theta) = 2\cos\theta$ とおくと，

$$x\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sin\theta,\ x\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -2\sin\theta$$

であるから $x\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = -x\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$ である．

また $y_1(\theta) = \dfrac{3}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，$y_2(\theta) = \dfrac{3}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ とおくと，

$$y_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\quad y_2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

であるから $y_1\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = y_2\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$ である．

以上から，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ の前後でグラフは y 軸について対称であることがわかる．

したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{S}{2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x\frac{dy}{d\theta}d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x\frac{dy}{d\theta}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{d\theta}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right)d\theta
\end{aligned}$$

（$1 + \cos 2\theta$ は偶関数，$\sin 2\theta$ は奇関数なので，）

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)d\theta$$

$$= 3\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{3}{2}\pi$$

ゆえに $S = \boldsymbol{3\pi}$.

(3)　求める体積を V とする．(2) と同様に対称性に注意すると

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 \frac{dy}{d\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\pi\cos^2\theta \left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) d\theta$$
$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^3\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos^2\theta\right) d\theta$$

（$\cos^3\theta$ は偶関数，$\sin\theta\cos^2\theta$ は奇関数なので，）

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^3\theta\, d\theta \cdots (*)$$
$$= 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + 3\cos\theta) d\theta$$
$$= 3\pi \left[\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boldsymbol{8\pi}$$

注釈

$(*)$ について，$\cos^3\theta$ の定積分は以下のようにしてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1 - \sin^2\theta) d\theta$$
$$= \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

講評

Ⅰ［小問集合］((1) やや易 (2) 標準 (3) やや易）(1) は外心，垂心，重心の位置ベクトルを求める典型的な問題であり，内積を利用する．計算量はやや多いので要領よく処理したい．オイラー線を知っていれば D が重心であることがわかる．(2) は整数問題であり，左辺を平方完成すれば $x,\ y$ の値を絞り込むことができる．(3) は確率の問題であり，表などを書いて情報を整理するとよいだろう．

Ⅱ［複素数］(標準〜やや難）1 の 7 乗根の問題．1 の n 乗根の基本的な性質がわかっていれば (1) はたやすい．(2)(3) は (1) をうまく用いて解くことになるが，(3) の後半はいろんなアプローチがあり，やや手間取ったかもしれない．

Ⅲ［数列］(標準）(2) で数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の漸化式に持ち込む解法を知っているかどうか，それで勝負が決まる．(1)(3) はただの計算問題．(4) も誘導が親切なので難しくない．

Ⅳ［数学Ⅲの微積分］(標準）三角関数でパラメータ表示された曲線について，概形の図示や求積をする問題である．難しくはないのだが，計算量や言及すべき記述が多い．θ の定義域を適宜広げると求積の計算が楽になる．

2020 年前後期と同様に空所補充形式と記述形式がミックスされているが，記述形式の割合が大きくなっている．難易度は例年なみだが，記述が増えたため作業量は多くなっているといえる．目標は 70%.