医学部進学予備校 メビオ × 医学部専門予備校 YMS heart of medicine × メルリックス英進館

解答速報

藤田医科大学（ふじた未来入試）　数学

2020年 11月　8日実施

問題 1

(1) $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{エ}}$ にあてはまる文を次の ①〜④ から選べ。

① 「必要十分条件である」

② 「必要条件であるが十分条件でない」

③ 「十分条件であるが必要条件でない」

④ 「必要条件でも十分条件でもない」

実数 x，y について，$x^4+y^4=0$ は $x+y=0$ であるための $\boxed{\text{ア}}$。

集合 A，B，C について，$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{B}\cup\mathrm{C}$ は $\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\mathrm{A}$ であるための $\boxed{\text{イ}}$。

関数 $f(x)$ が $x=1$ で連続であることは，$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるための $\boxed{\text{ウ}}$。

3 辺の長さが a，b，c の三角形において，

$$a^6-a^4b^2-a^4c^2-a^2b^4+2a^2b^2c^2-a^2c^4+b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6=0$$

が成り立つことはこの三角形が直角三角形であるための $\boxed{\text{エ}}$。

(2) 関数 $f(x)=4x^3-30x^2+48x-13$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値と最小値の差は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(3) A，B，C，D，E，F，G，H，I の 9 人をくじ引きで 4 人，3 人，2 人のグループに分ける。A，B，C が 3 人とも異なるグループに分かれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4) 63，294，a の最大公約数が 21，最小公倍数が 9702 である。このような正の整数 a の最小値は $\boxed{\text{ケコサ}}$ である。

(5) 25 名を対象として試験を実施したところ，5 名が 40(点)，10 名が 60(点)，10 名が 100(点) であった。この試験の平均値は $\boxed{\text{シス}}$ (点)，標準偏差は $\boxed{\text{セソ}}$ (点) である。

(6) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=100$，$a_{n+1}=-a_n+n$ を満たす。$a_{50}=\boxed{\text{タチツ}}$，$a_{51}=\boxed{\text{テトナ}}$ である。

(7) 原点を O とする xy 平面上に 3 点 A$(2,\ -1)$，B$(-1,\ 3)$，C$(4,\ 2)$ がある。

$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$，$0\leqq r\leqq 1$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}+r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

を満たす点 P の存在しうる領域の面積は $\boxed{\text{ニヌ}}$ である。

(8) 複素数平面上の原点にない異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して，

$$(5\sqrt{3}+5i)\alpha+(1-5\sqrt{3}-5i)\beta-\gamma=0,\ |\alpha-\beta|=4$$

が成り立つとき，△ABC の面積は $\boxed{\text{ネノ}}$ である。ただし i は虚数単位である。

(9) $\displaystyle\int_{-3}^{3}x(x+\cos^3 x)dx=\boxed{\text{ハヒ}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	③
イ	①
ウ	②
エ	①
オカ	54
$\dfrac{キ}{ク}$	$\dfrac{2}{7}$
ケコサ	231

解答記号	正解
シス	72
セソ	24
タチツ	−75
テトナ	125
ニヌ	27
ネノ	40
ハヒ	18

解説

(1) ア．$x^4+y^4=0 \rightleftarrows x+y=0$

($\rightarrow$) 真．

x，y は実数であるから，$x^4+y^4=0 \iff x^2=y^2=0 \iff x=y=0$ である．

($\leftarrow$) 偽．反例は，$x=1$，$y=-1$．

ゆえに，**③「十分条件であるが必要条件でない」**．

イ．$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{B}\cup\mathrm{C} \rightleftarrows \mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\mathrm{A}$

($\rightarrow$) 真．$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{B}\cup\mathrm{C}$ より，$\mathrm{A}\subset(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$ であるから，$\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\mathrm{A}$ が成り立つ．

($\leftarrow$) 真．$\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=\mathrm{A}$ より，$\mathrm{A}\subset(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$ であるから，$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{B}\cup\mathrm{C}$ が成り立つ．

ゆえに，**①「必要十分条件である」**．

ウ．$x=1$ で連続である $\rightleftarrows$ $x=1$ で微分可能である

($\rightarrow$) 偽．反例は，$y=|x-1|$．

($\leftarrow$) 真．$x=1$ で微分可能ならば $f'(1)$ が存在する．このとき，

$$\lim_{x\to1}\{f(x)-f(1)\}=\lim_{x\to1}(x-1)\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0\cdot f'(1)=0$$

より $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$．したがって $x=1$ において連続である．

ゆえに，**②「必要条件であるが十分条件でない」**．

エ．$a^6-a^4b^2-a^4c^2-a^2b^4+2a^2b^2c^2-a^2c^4+b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6=0 \rightleftarrows$ 直角三角形

$$a^6-a^4b^2-a^4c^2-a^2b^4+2a^2b^2c^2-a^2c^4+b^6-b^4c^2-b^2c^4+c^6=0$$

$$a^6-(b^2+c^2)a^4-(b^2-c^2)^2a^2+(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)=0$$

$$a^4\{a^2-(b^2+c^2)\}-(b^2-c^2)^2\{a^2-(b^2+c^2)\}=0$$

$$(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$$

よって，$a^2+c^2=b^2$ または $a^2+b^2=c^2$ または $b^2+c^2=a^2$ であるから，三角形 ABC は直角三角形である．

逆もまた真であるから，**①「必要十分条件である」**．

(2) $f'(x)=12x^2-60x+48=12(x-1)(x-4)$ より，$0\leqq x\leqq 5$ における増減表は以下のようになる．

x	0		1		4		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-13	$\nearrow$	9	$\searrow$	-45	$\nearrow$	-23

よって最大値と最小値の差は，$9-(-45)=\mathbf{54}$．

(3)　全事象は，${}_9\mathrm{C}_4 \cdot {}_5\mathrm{C}_3 = 1260$ 通り.

A，B，C が 3 人とも異なるグループに分かれる場合の数は

- A，B，C を 4 人，3 人，2 人のいずれのグループにするかで $3! = 6$ 通り.
- 残り 6 人が 3 人，2 人，1 人に分かれる場合の数は，${}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 = 60$ 通り.

よって求める確率は $\dfrac{6 \cdot 60}{1260} = \boldsymbol{\dfrac{2}{7}}$.

(4)　$63 = 3^2 \cdot 7$，$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$，$a$ の最大公約数が $21 = 3 \cdot 7$，最小公倍数が $9702 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ より，

$$a = 2^k \cdot 3^l \cdot 7^m \cdot 11^n \ (\text{ただし，} 0 \leqq k \leqq 1,\ 1 \leqq l \leqq 2,\ 1 \leqq m \leqq 2,\ n = 1)$$

とおける.

したがって，a の最小値は $2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = \mathbf{231}$.

(5)　25 人のデータの平均値を $\overline{x}$，分散を V_x，標準偏差を S_x とすると，

$$\overline{x} = \frac{5 \times 40 + 10 \times 60 + 10 \times 100}{25} = \mathbf{72}(\text{点})$$

また，$V_x = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ と表されるので，

$$V_x = \frac{5 \times 40^2 + 10 \times 60^2 + 10 \times 100^2}{25} - 72^2 = 576$$

よって，$S_x = \sqrt{V_x} = \mathbf{24}(\text{点})$.

(6)　与えられた漸化式を $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = -(a_n + \alpha n + \beta)$ と変形する.

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = -(a_n + \alpha n + \beta) \iff a_{n+1} = -a_n - 2\alpha n - \alpha - 2\beta$$

であるから，与えられた漸化式と比較して，$\alpha = -\dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{1}{4}$ を得る．よって，

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4} = -\left(a_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right)$$

より，数列 $\left\{a_n - \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $a_1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{399}{4}$，公比 -1 の等比数列である.

$$a_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} = \frac{399}{4}(-1)^{n-1} \iff a_n = \frac{399(-1)^{n-1} + 2n - 1}{4}$$

よって，$a_{50} = \dfrac{-399 + 99}{4} = \mathbf{-75}$，$a_{51} = \dfrac{399 + 101}{4} = \mathbf{125}$.

別解

$a_{n+2} = -a_{n+1} + n + 1$ が成り立つので，与えられた漸化式を利用すると，

$$a_{n+2} = a_n + 1$$

が成り立つ．よって，k を自然数として，$n = 2k$ とおくと，$a_{2(k+1)} = a_{2k} + 1$，$a_2 = -99$ より，

$$a_{2k} = a_2 + (k-1) = k - 100 \iff a_n = \frac{n}{2} - 100$$

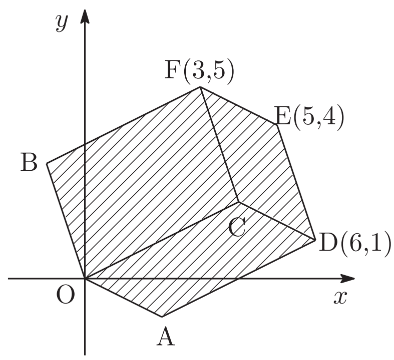
よって，$a_{50} = 25 - 100 = \mathbf{-75}$，$a_{51} = -a_{50} + 50 = \mathbf{125}$.

(7)　点 P の存在しうる領域は図のようになる.

求める面積を S とすると，

$$S = (\text{四角形 OADC}) + (\text{四角形 CDEF}) + (\text{四角形 OCFB}) \cdots ①$$

と表される．



$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (4,\ 2)$ より，

$$(\text{四角形 OADC}) = |2 \cdot 2 - (-1) \cdot 4| = 8$$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-1,\ 3)$ より，

$$(\text{四角形 CDEF}) = |2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1)| = 5$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (-1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (4,\ 2)$ より，

$$(\text{四角形 OCFB}) = |(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 4| = 14$$

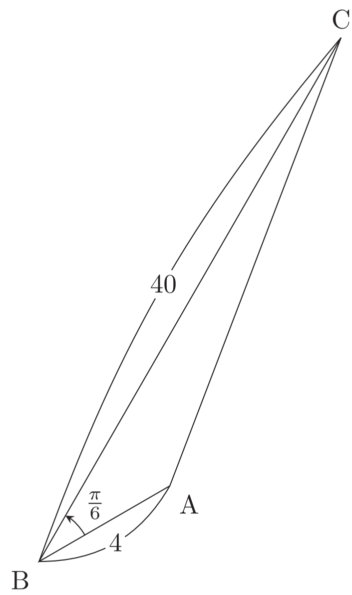
よって①より

$$S = 8 + 5 + 14 = \mathbf{27}$$

(8)　以下のように式変形する．

$$\begin{aligned} &(5\sqrt{3} + 5i)\alpha + (1 - 5\sqrt{3} - 5i)\beta - \gamma = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &(5\sqrt{3} + 5i)(\alpha - \beta) - (\gamma - \beta) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\gamma - \beta = 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

より，BC は BA を B を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ 回転して 10 倍に拡大したものである．よって AB $= 4$ より BC $= 40$，$\angle\mathrm{CBA} = \dfrac{\pi}{6}$ となるので，$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = \mathbf{40}$ である．



(9)　$f(x) = x\cos^3 x$ とおくと，$f(-x) = -x\cos^3(-x) = -x\cos^3 x = -f(x)$ であるから，$f(x)$ は奇関数であり，また，x^2 は偶関数であるから，

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{3} x(x + \cos^3 x)\,dx &= \int_{-3}^{3} (x^2 + x\cos^3 x)\,dx \\ &= 2\int_0^3 x^2\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

問題2

m，n を 1 より大きい整数とするとき，n^m は連続する n 個の奇数の和で表されることを示せ。

解答

① n が奇数のとき，

$n=2k+1$（k は整数）とおくと n^{m-1} も奇数である．

$$n^{m-1}-2k,\ n^{m-1}-2k+2,\ \cdots,\ n^{m-1}+2k-2,\ n^{m-1}+2k$$

は $2k+1$ 個，すなわち n 個の連続する奇数であり，

$$\begin{aligned}&(n^{m-1}-2k)+(n^{m-1}-2k+2)+\cdots+(n^{m-1}+2k-2)+(n^{m-1}+2k)\\=&\frac{\{(n^{m-1}-2k)+(n^{m-1}+2k)\}n}{2}\\=&n^m\end{aligned}$$

である．

② n が偶数のとき，

$n=2k$（k は整数）とおくと n^{m-1} も偶数である．

$$n^{m-1}-2k+1,\ n^{m-1}-2k+3,\ \cdots,\ n^{m-1}+2k-3,\ n^{m-1}+2k-1$$

は $2k$ 個，すなわち n 個の連続する奇数であり，

$$\begin{aligned}&(n^{m-1}-2k+1)+(n^{m-1}-2k+3)+\cdots+(n^{m-1}+2k-3)+(n^{m-1}+2k-1)\\=&\frac{\{(n^{m-1}-2k+1)+(n^{m-1}+2k-1)\}n}{2}\\=&n^m\end{aligned}$$

である．（証明終）

別解

連続する n 個の奇数のうち最小のものを $2l+1$ とすると，これらの n 個の奇数の和は，

$$\sum_{k=l+1}^{l+n}(2k-1)=(2l+n)n$$

これが n^m になる，ということは，

$$(2l+n)n=n^m \iff l=\frac{n^{m-1}-n}{2}$$

となる整数 l が存在する，ということと同値であるが，n^{m-1} と n の偶奇は一致するので $\dfrac{n^{m-1}-n}{2}$ は必ず整数である．すなわち題意は成立する．

（証明終）

問題 3

xy 平面上の曲線 $C : y = 2x^2 - x^3$ と直線 $\ell : y = mx$（m は実数）に対して以下の問いに答えよ。

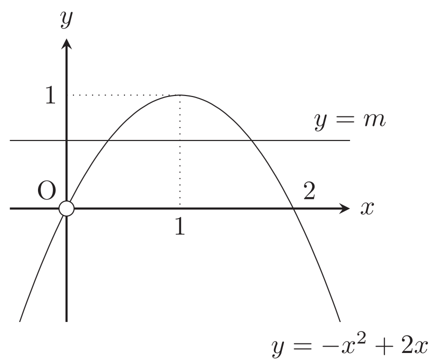
(1)　曲線 C と直線 ℓ の共有点の個数を調べよ。

(2)　共有点の個数が 2 つ以上のとき，曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積が最小になる m の値と，そのときの面積を求めよ。

解答

(1)　C と ℓ の方程式から y を消去すると $x(x^2 - 2x + m) = 0$ が得られる．これにより $x = 0$ は解のひとつとわかるので，$x^2 - 2x + m = 0$ が $x = 0$ 以外にいくつの解をもつかを考えればよい．$y = -x^2 + 2x$ と $y = m$ の共有点の個数を調べることにより，$x^2 - 2x + m = 0$ の $x = 0$ 以外の解の個数は

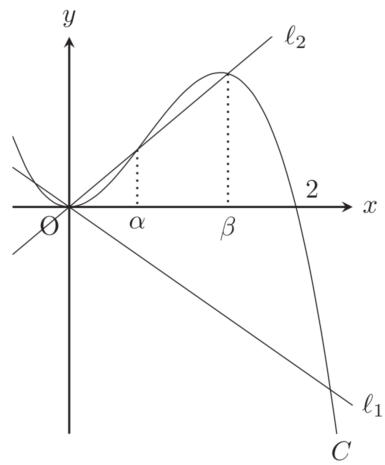
$$\begin{cases} m < 0 & \text{のとき　2 個} \\ m = 0 & \text{のとき　1 個} \\ 0 < m < 1 & \text{のとき　2 個} \\ m = 1 & \text{のとき　1 個} \\ m > 1 & \text{のとき　0 個} \end{cases}$$



となるので，$x(x^2 - 2x + m) = 0$ の解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{m < 0} & \textbf{のとき　3 個} \\ \boldsymbol{m = 0} & \textbf{のとき　2 個} \\ \boldsymbol{0 < m < 1} & \textbf{のとき　3 個} \\ \boldsymbol{m = 1} & \textbf{のとき　2 個} \\ \boldsymbol{m > 1} & \textbf{のとき　1 個} \end{cases}$$

(2)　題意の面積を S とする．共有点の個数の条件から $m \leqq 1$ のときを考えればよい．C のグラフを考えれば，$m \leqq 0$ のときは S は m に対して単調に減少するのは明らかなので (図の ℓ_1)，$0 \leqq m \leqq 1$ のときの S の増減を調べればよい（図の ℓ_2)．



この範囲での $x^2 - 2x + m = 0$ の解 $x = 1 \pm \sqrt{1-m}$ について，$\alpha = 1 - \sqrt{1-m}$, $\beta = 1 + \sqrt{1-m}$ とおくと，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha \{mx - (-x^3 + 2x^2)\}dx + \int_\alpha^\beta (-x^3 + 2x^2 - mx)dx \\ &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx - \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx \end{aligned}$$

となる．ここで $\sqrt{1-m} = t$ とおくと，$0 \leqq t \leqq 1$ であり，$\alpha = 1 - t$, $\beta = 1 + t$ である．

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx &= \int_0^\alpha \{x^2(x-\alpha) - \beta x(x-\alpha)\}dx \\ &= -\frac{1}{12}\alpha^4 + \frac{1}{6}\beta\alpha^3 \\ &= \frac{1}{12}\alpha^3(-\alpha + 2\beta) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12}(1-t)^3(3t+1)$$

また，

$$\begin{aligned}
-\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx &= -\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2(x-\beta)+\alpha(x-\alpha)(x-\beta)\}dx \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 + \frac{1}{6}\alpha(\beta-\alpha)^3 \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta) \\
&= \frac{4}{3}t^3
\end{aligned}$$

以上から，

$$S = \frac{1}{12}(1-t)^3(3t+1) + \frac{4}{3}t^3$$

となるので，

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{12}\left\{-3(1-t)^2(3t+1)+3(1-t)^3\right\} + 4t^2 \\
&= -t(1-t)^2 + 4t^2 \\
&= -t(t^2-6t+1)
\end{aligned}$$

が得られる．$\dfrac{dS}{dt} = 0 \iff t = 0,\ 3 \pm 2\sqrt{2}$ であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ での S の増減は以下の通りとなる．

t	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dS}{dt}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって $t = 3-2\sqrt{2}$ のとき S は最小となる．このとき，$m = 1-t^2 = \mathbf{12\sqrt{2}-16}$ である．またこのとき，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12}(-2+2\sqrt{2})^3(10-6\sqrt{2}) + \frac{4}{3}(3-2\sqrt{2})^3 \\
&= \frac{2}{3}(-7+5\sqrt{2})(10-6\sqrt{2}) + \frac{4}{3}(99-70\sqrt{2}) \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{3}(17-12\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

となる．

別解

S の最小値を求める際に次数下げを行うと，次のようになる．
$t = 3-2\sqrt{2}$ のとき，$\dfrac{dS}{dt} = 0$ を満たすことから，$t^3 = 6t^2 - t$ および $t^2 = 6t-1$ を満たす．

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{12}(1-t)^3(3t+1) + \frac{4}{3}t^3 \\
&= \frac{1}{12}\{(1-2t+t^2)(-3t^2+2t+1)\} + \frac{4}{3}t^3 \\
&= \frac{1}{12}\{4t(-3t^2+2t+1)+16t^3\} \\
&= \frac{1}{12}(4t^3+8t^2+4t)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(6t^2 - t + 2t^2 + t)$$

$$= \frac{8}{3}t^2$$

$$= \frac{8}{3}(3 - 2\sqrt{2})^2$$

$$= \boldsymbol{\frac{8}{3}(17 - 12\sqrt{2})}$$

講評

問題 1［小問集合］((1) 標準 (2) 易 (3) 易 (4) 標準 (5) 易 (6) 標準 (7) 標準 (8) 標準 (9) 標準)

差がつく問題は (6)(7)(9) あたりであろうか．(6) は一般項を求めずに推測していった方が速いかもしれない．(9) は $x\cos^3 x$ が奇関数であることに気が付いてほしい．

問題 2［整数］(難)

整数の証明問題．例えば 5^3 を 5 個の数の和であらわそうとすれば平均が 5^2 であればよいので，中央を 5^2 とすればよいということに気づくはずだ．それを一般化して存在することを示せばよいのだが，整数の証明問題というだけで怖じ気づいてしまった受験生もいるかもしれない．

問題 3［数学 II の微積分］(易〜難)

(2) は計算量が多く，積分計算や面積の増減を求める際にある程度の工夫が必要なことから，多くの受験生が最後までたどり着けなかったと思われる．しっかり方針を記述して部分点はしっかり取っておきたい．

小問集合は穏やかな難易度で，落とせない問題が多い．とは言え計算量は多く，処理力で大きく差が付きそうである．大問については，問題 2，および問題 3 の後半が難しく，ここを突破すればかなり有利だが，多くの受験生は手が出なかったのではないか．1 次合格のための目標点は 50%.