解答速報

藤田医科大学（後期）　数学

2021年 3月4日実施

問題 1

次の問いに答えよ。

(1)　2 つの変量 x, y についてのデータを示す。

x	5	2	3	4	6	8	7
y	5	8	7	6	4	2	3

x と y の相関係数 r に対し整数 a が $a \leqq 9r < a+1$ を満たすとき，　$a =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2)　1.024^{2021} は 10 進法で $\boxed{\text{ウエ}}$ 桁の数である。ただし $0.30102 < \log_{10} 2 < 0.30103$ である。

(3)　xy 平面上で原点 O までの距離と点 A(8, 0) までの距離の和が 10 以下となる領域の面積は $\boxed{\text{オカ}}\pi$ であり，この領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{キク}}\pi$ である。

(4)　循環小数 $0.189189\cdots\cdots = 0.\dot{1}8\dot{9}$ を既約分数で表すと $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(5)　正の整数 m に対して二次方程式 $x^2 - mx - 2m + 13 = 0$ が 2 つの異なる整数解を持つとき，$m =$ $\boxed{\text{シス}}$ である。

(6)　複素数 x が $x^2 - x + 1 = 0$ を満たすとき，

$12x^{2026} + 23x^{2025} + 34x^{2024} + 45x^{2023} + 56x^{2022} + 67x^{2021} =$ $\boxed{\text{セソ}}$ である。

(7)　$x = \sqrt{23 + 8\sqrt{7}}$ に対して 2 つの整数 a, b が $a = x + \dfrac{b}{x}$ を満たすとき，$a =$ $\boxed{\text{タ}}$，$b =$ $\boxed{\text{チ}}$ である。

(8)　各面に 1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれた立方体のサイコロを 5 個同時に投げる。出た目の積が 4 で割り切れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(9)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $1 - (8\sin^3 x + \cos^3 x)^2$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

(10)　$\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。ただし e は自然対数の底である。

解答

解答記号	正解
アイ	-9
ウエ	21
オカ	15
キク	60
$\dfrac{ケ}{コサ}$	$\dfrac{7}{37}$
シス	14
セソ	66

解答記号	正解
タ	8
チ	9
$\dfrac{ツテ}{トナ}$	$\dfrac{83}{96}$
$\dfrac{ニ}{ヌネ}$	$\dfrac{1}{65}$
$\dfrac{ノ}{ハ}$	$\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　x, y の平均をそれぞれ $\overline{x}$, $\overline{y}$ とし，次の表をかいて考える．

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
5	5	0	0	0	0	0
2	8	-3	3	9	9	-9
3	7	-2	2	4	4	-4
4	6	-1	1	1	1	-1
6	4	1	-1	1	1	-1
8	2	3	-3	9	9	-9
7	3	2	-2	4	4	-4

x, y の標準偏差をそれぞれ S_x, S_y，x と y の共分散を S_{xy} とおくと，

$$S_x = S_y = \sqrt{\frac{1}{7}(0+9+4+1+1+9+4)} = 2$$

$$S_{xy} = \frac{1}{7}\{0+(-9)+(-4)+(-1)+(-1)+(-9)+(-4)\} = -4$$

これらより

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-4}{2\cdot 2} = -1$$

が得られる．$a \leqq 9r < a+1$ より

$$a \leqq -9 < a+1 \iff -10 < a \leqq -9$$

であり，a は整数より，$a = \mathbf{-9}$ と定まる．

注釈

すべてのデータについて $x+y=10$ が成り立っているため，$r=-1$ となるのは明らかである．

(2)　1.024^{2021} の常用対数をとると，

$$\log_{10} 1.024^{2021} = 2021 \log_{10} 1.024 = 2021 \log_{10} \frac{1024}{1000} = 2021(10\log_{10} 2 - 3)$$

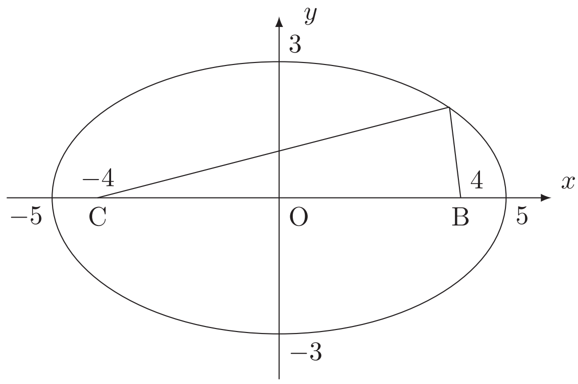
$0.30102 < \log_{10} 2 < 0.30103$ より，$0.0102 < 10\log_{10} 2 - 3 < 0.0103$ なので，

$$20.6142 < \log_{10} 1.024^{2021} < 20.8163$$

よって $20 \leqq \log_{10} 1.024^{2021} < 21 \iff 10^{20} \leqq 1.024^{2021} < 10^{21}$ となるので，1.024^{2021} は **21** 桁の整数である．

(3)　全体を x 軸方向に -4 平行移動させて考える．

点 B$(4,\ 0)$ までの距離と点 C$(-4,\ 0)$ までの距離の和が一定になる点の軌跡は, この 2 点を焦点とする楕円である．長軸の長さは 距離の和である 10 に等しいので, 長軸半径が 5 とわかる．よってこの楕円の式を $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおくと，$\sqrt{25-b^2}=4$ より $b^2=9$ と求まるので，楕円の式は $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ と定まる．



求める領域の面積は，この楕円の面積に等しいので，$\pi\cdot 5\cdot 3=\mathbf{15}\pi$.

求める体積は，回転楕円体の体積であるから，$\dfrac{4}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 5=\mathbf{60}\pi$.

別解

求める立体の体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^5 y^2dx=2\pi\int_0^5\left(9-\frac{9}{25}x^2\right)dx\\&=2\pi\left[9x-\frac{3}{25}x^3\right]_0^5\\&=2\pi(45-15)=\mathbf{60}\pi\end{aligned}$$

(4)　$x=0.189189\cdots\cdots$ とおくと，

$$\begin{aligned}x&=0.189+0.000189+0.000000189+\cdots\\&=\frac{189}{10^3}+\frac{189}{10^6}+\frac{189}{10^9}+\cdots\\&=\frac{\frac{189}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}\\&=\frac{189}{999}=\mathbf{\frac{7}{37}}\end{aligned}$$

別解

$x=0.189189\cdots\cdots$ とおくと，

$$\begin{array}{rrcr}&1000x&=&189.189\cdots\cdots\\-)&x&=&0.189\cdots\cdots\\\hline&999x&=&189\end{array}$$

よって $x=\dfrac{189}{999}=\mathbf{\dfrac{7}{37}}$ である.

(5)　$x^2-mx-2m+13=0$ の 2 つの異なる整数解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=m\\\alpha\beta=-2m+13\end{cases}$$

である．これより m を消去すると，

$$\alpha\beta+2\alpha+2\beta=13\iff(\alpha+2)(\beta+2)=17$$

$\alpha,\ \beta$ は整数であるので

$$(\alpha+2,\ \beta+2)=(-17,\ -1),\ (1,\ 17)\iff(\alpha,\ \beta)=(-19,\ -3),\ (-1,\ 15)$$

このとき，$m=-22,\ 14$ であるが，$m>0$ より $m=\mathbf{14}$ である．

(6)　$x^2-x+1=0$ の解の 1 つを $x=\alpha$ とすると，
$\alpha^2-\alpha+1=0$ であるので両辺 $\alpha+1$ をかけることにより，$\alpha^3+1=0$
すなわち $\begin{cases}\alpha^2-\alpha+1=0\\ \alpha^3=-1\ (\alpha^6=1)\end{cases}$ を得る．
よって求める値は，

$$\begin{aligned}&12\alpha^{2026}+23\alpha^{2025}+34\alpha^{2024}+45\alpha^{2023}+56\alpha^{2022}+67\alpha^{2021}\\ =&12\alpha^4+23\alpha^3+34\alpha^2+45\alpha+56+67\alpha^5\ (\because\ \alpha^6=1)\\ =&-12\alpha-23+34\alpha^2+45\alpha+56-67\alpha^2\ (\because\ \alpha^3=-1)\\ =&-33\alpha^2+33\alpha+33\\ =&-33(\alpha^2-\alpha+1)+66=\mathbf{66}\end{aligned}$$

(7)　$x=\sqrt{23+2\sqrt{16\cdot 7}}=4+\sqrt{7}$ であるから，

$$\begin{aligned}a=x+\frac{b}{x}\ &\iff\ a=4+\sqrt{7}+\frac{b}{4+\sqrt{7}}\\ &\iff\ a=4+\sqrt{7}+\frac{b(4-\sqrt{7})}{16-7}\\ &\iff\ 9a=36+9\sqrt{7}+b(4-\sqrt{7})\\ &\iff\ 9a=36+4b+(9-b)\sqrt{7}\end{aligned}$$

$\sqrt{7}$ は無理数，$a,\ b$ は整数であるから，$9a=36+4b,\ 0=9-b$ である．よって，$a=\mathbf{8},\ b=\mathbf{9}$.

(8)　出た目の積が 4 で割り切れる事象の余事象は，
「5 個の目すべてが奇数」または「4 個の目が奇数で 1 個の目が 2 または 6 である」
という事象である．このときの確率は，

$$\left(\frac{3}{6}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{1}{32}+\frac{5}{48}=\frac{13}{96}$$

ゆえに，求める確率は，$1-\dfrac{13}{96}=\dfrac{\mathbf{83}}{\mathbf{96}}$.

(9)　$f(x)=1-(8\sin^3x+\cos^3x)^2$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(x)&=-2(8\sin^3x+\cos^3x)(24\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x)\\ &=-6\sin x\cos x(8\sin^3x+\cos^3x)(8\sin x-\cos x)\end{aligned}$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$\sin x>0,\ \cos x>0$ であるから，$f'(x)=0$ となるのは，$8\sin x-\cos x=0$ のときであり，$\cos x\fallingdotseq 0$ より，$\tan x=\dfrac{1}{8}$ である．$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，これを満たす実数 x はただ 1 つ存在するのでその値を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$x=\alpha$ で $f(x)$ は最大値 $f(\alpha)$ をとる．$\tan\alpha=\dfrac{1}{8}$ より，$\cos\alpha=\dfrac{8}{\sqrt{65}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$ であるから，

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1-\left(8\sin^3\alpha+\cos^3\alpha\right)^2 \\ &= 1-\left\{8\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right)^3+\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right)^3\right\}^2 \\ &= 1-\frac{64}{65} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{65}} \end{aligned}$$

(10)　$\log x=t$ と置換してもよいが，以下のようにしてもよい．

$$\begin{aligned} \int_e^{e^4}\frac{1}{x(\log x)^2}dx &= \int_e^{e^4}(\log x)'(\log x)^{-2}dx \\ &= \Big[-(\log x)^{-1}\Big]_e^{e^4} \\ &= -\frac{1}{4}+1 \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

問題２

n を 2 以上の整数とする。n 校の学校から 2 名ずつ，計 $2n$ 名が集まっており，くじ引きで 2 名 1 組，計 n 組に組み分けを行う。同じ学校の生徒の組が 1 つもない確率を $P(n)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P(2)$ を求めよ。

(2)　$P(3)$ を求めよ。

(3)　$P(4)$ を求めよ。

(4)　$P(5)$ を求めよ。

解答

以下で $A(n)$ は，$2n$ 名を 2 名 1 組で計 n 組に組み分けして，同じ学校の生徒の組が 1 つもない場合の数を表すとする．

(1)　全事象は $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{2!}=3$ 通りである．このうち，題意を満たす場合の数はそれぞれの学校の生徒が別々の組に分かれる場合であるから 2 通りである $(A(2)=2)$ から，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ である．

(2)　全事象は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{3!}=15$ 通りである．このうち，題意を満たさない場合の数は，

同じ学校の生徒からなる組の数	場合の数
1	${}_3\mathrm{C}_1\times A(2)=6$
2	0
3	1
計	7

であるから，$A(3)=15-7=8$ となる．したがって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$ である．

(3)　全事象は $\dfrac{{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{4!}=105$ 通りである．このうち，題意を満たさない場合の数は

同じ学校の生徒からなる組の数	場合の数
1	${}_4\mathrm{C}_1\times A(3)=32$
2	${}_4\mathrm{C}_2\times A(2)=12$
3	0
4	1
計	45

であるから，$A(4)=105-45=60$ となる．したがって，求める確率は $\dfrac{60}{105}=\boldsymbol{\dfrac{4}{7}}$ である．

(4)　全事象は $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{5!}=945$ 通りである．このうち，題意を満たさない場合の数は

同じ学校の生徒からなる組の数	場合の数
1	${}_5\mathrm{C}_1\times A(4)=300$
2	${}_5\mathrm{C}_2\times A(3)=80$
3	${}_5\mathrm{C}_3\times A(2)=20$
4	0
5	1
計	401

であるから，$A(5)=945-401=544$ となる．したがって，求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{544}{945}}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

例えば5校の生徒を A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2 とする（アルファベットが学校を表す）．特定の生徒 A_1 からスタートして

$$\begin{array}{lll} & \mathrm{A}_1 & \Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 \text{ のペア } \mathrm{B}_1 \\ \to & \mathrm{B}_1 \text{ と同じ学校のもう1人 } \mathrm{B}_2 & \Rightarrow \quad \mathrm{B}_2 \text{ のペア } \mathrm{D}_2 \\ \to & \mathrm{D}_2 \text{ と同じ学校のもう1人 } \mathrm{D}_1 & \Rightarrow \quad \cdots \end{array}$$

などとたどっていくといずれ A_1 に戻ってくるループが出来る．

組み分けが $(\mathrm{A}_1,\ \mathrm{B}_1)$, $(\mathrm{B}_2,\ \mathrm{D}_2)$, $(\mathrm{D}_1,\ \mathrm{A}_2)$, $(\mathrm{C}_1,\ \mathrm{E}_2)$, $(\mathrm{E}_1,\ \mathrm{C}_2)$ であった場合，ループは

$$\mathrm{A}_1 \Rightarrow \mathrm{B}_1 \to \mathrm{B}_2 \Rightarrow \mathrm{D}_2 \to \mathrm{D}_1 \Rightarrow \mathrm{A}_2 \to \mathrm{A}_1$$

および

$$\mathrm{C}_1 \Rightarrow \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_1 \Rightarrow \mathrm{C}_2 \to \mathrm{C}_1$$

である．ただし元に戻ったところでループの表示を打ち切っている．

5校10人の組み分けは $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2}{5!} = 945$ 通りある．このうち同じ学校の組が1つもないのは，上のループが6人，4人の2つのループになっている場合と，10人からなる1つのループになっている場合である．

(i)　6人，4人の2つのループになっている場合

6人のループは3校からなる．その選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り．その際のループに現れる学校の順番の決め方が $(3-1)! = 2$ 通り，それぞれに対してループの決め方（ペアの決め方）が $2^2 = 4$ 通り．また残り4人のループの決め方が2通り．以上よりこの場合は $10 \times 2 \times 4 \times 2 = 160$ 通り．

(ii)　10人からなる1つのループになっている場合ループに現れる学校の順番の決め方が $(5-1)! = 24$ 通り，それぞれに対してループの決め方（ペアの決め方）が $2^4 = 16$ 通り．以上よりこの場合は $24 \times 16 = 384$ 通り．

(i)(ii) を合わせて $160 + 384 = 544$ 通りなので，$P(5) = \boldsymbol{\dfrac{544}{945}}$.

問題3

空間内に四面体 OABC があり，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=15$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ である。平面 ABC 上に $\mathrm{OP}=3\sqrt{11}$ となるように点 P をとり，点 P から平面 AOB，BOC，COA に下ろした垂線をそれぞれ PQ，PR，PS とする。

PQ，PR，PS を 3 辺とする直方体 T について，次の問いに答えよ。

(1) PQ，PR，PS の長さの和が一定になることを示せ。

(2) 直方体 T の全表面積が一定になることを示せ。

(3) 直方体 T の体積の最大値と最小値を求めよ。

解答

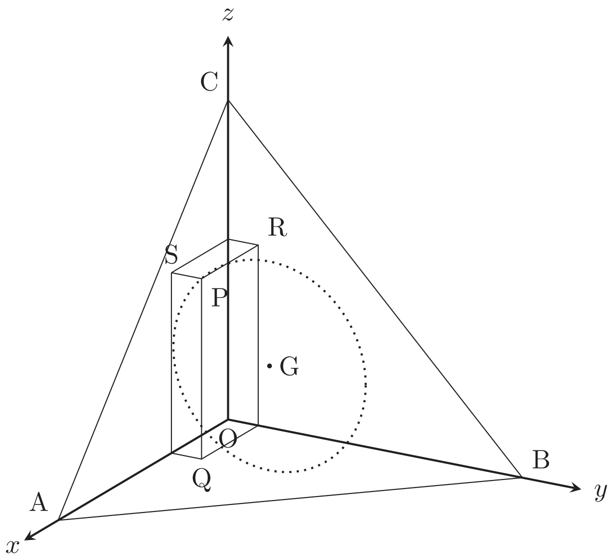
(1) 座標空間に，O(0, 0, 0), A(15, 0, 0), B(0, 15, 0), C(0, 0, 15) をとれば題意の四面体が得られる．点 P の座標を $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ とおくと，$3\sqrt{11}<\dfrac{15}{\sqrt{2}}$ より $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$ であるので，

$$\mathrm{PQ}=\gamma,\ \mathrm{PR}=\alpha,\ \mathrm{PS}=\beta$$

である．平面 ABC の方程式は，$x+y+z=15$ であるが，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ はこの平面上にあるので，$\alpha+\beta+\gamma=15$ が成り立つ．したがって，

$$\mathrm{PQ}+\mathrm{PR}+\mathrm{PS}=\alpha+\beta+\gamma=15$$

で一定である． （証明終）



注釈

点 P の軌跡は，平面 ABC において点 G(5, 5, 5) を中心とし半径が $2\sqrt{6}$ である円となる（図中の点線の円）．

(2) 立方体の表面積は，$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ である．また，$\mathrm{OP}=3\sqrt{11}$ より，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=99$ である．よって，

$$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=15^2-99=126$$

で一定である． （証明終）

(3) 直方体 T の体積を V とおくと，$V=\alpha\beta\gamma$ なので，解と係数の関係より，恒等式

$$t^3-15t^2+63t-V=(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)$$

が成り立つ．$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ はすべて正の実数なので，t の 3 次方程式

$$t^3-15t^2+63t-V=0 \iff t^3-15t^2+63t=V \ \cdots \text{①}$$

の解がすべて正の実数となるための V の条件を求める.

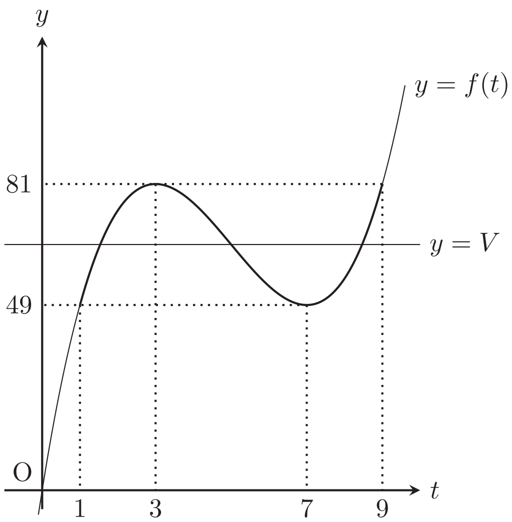
$$f(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$$

とおくと,

$$f'(t) = 3t^2 - 30t + 63 = 3(t-3)(t-7)$$

より,$y = f(t)$ の増減表とグラフは以下の通りである.

t	$\cdots$	3	$\cdots$	7	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	81	$\searrow$	49	$\nearrow$



$y = f(t)$ のグラフと $y = V$ のグラフの交点を調べることにより,①の解がすべて正の実数になるための V の条件は,$49 \leqq V \leqq 81$ であることがわかる($V < 49$ または $V > 81$ のとき,①の実数解は1つ,虚数解が2つとなる).したがって,**体積の最大値は 81,最小値は 49** となる.

講評

問題 1［小問集合］((1) 標準 (2) やや易 (3) 標準 (4) 易 (5) 標準 (6) やや難 (7) 標準 (8) 標準 (9) やや難 (10) やや易)
(2)(4)(7)(10) は取りたい．また，差がつく問題は (3)(6)(9) あたりだろう．(3) では 2 点からの距離の和が 10 以下であることから，楕円の周および内部を表していることに気付きたい．(6) では条件を満たす x は $x^3 = -1$ を満たすことに気付けば次数下げが容易になる．(9) ではそのまま微分をすれば最大値が求められる．

問題 2［確率］(標準〜やや難)
攪乱順列に似たタイプの確率の問題．(2) 以降は，各設問を解き進めるにあたってそれ以前の設問の結果が利用できる．それに気付ければスムーズに最後まで解けるだろう．差が付きそうな問題である．

問題 3［空間図形，数学 II の微積分］(標準〜やや難)
一見図形問題に見えるが，座標に関する式計算の問題である．空間座標における平面の方程式を扱った経験がないと苦しい．(1), (2) はしっかり定式化できれば答に直結している．(3) は 3 次関数に関する微分の問題で，解と係数の関係を利用することに気付かないと解けないだろう．方針が立てば計算自体は簡単．

小問集合は穏やかな難易度で，落とせない問題が多い．とは言え，解法の引き出しが多いかどうかで大きく差が付きそうである．大問については，問題 2 の後半，および問題 3 が難しく，ここを突破すればかなり有利だが，多くの受験生は手が出なかったのではないか．1 次合格のための目標点は 60%．