解答速報

藤田医科大学（前期）　数学

2021年 1月21日実施

問題 1

(1)　5 つの整数からなるデータ

$$-14,\ 16,\ 21,\ a,\ b$$

の平均が 5，分散が 164，$a<b$ のとき，$a=$ $\boxed{アイ}$ である。

(2)　任意の実数 θ で $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\cos(\theta+a\pi)$ が成り立つとき，$a=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

ただし，$-1\leqq a<1$ とする。

(3)　実数 x，y について $5000^x=2000^y=\sqrt{10}$ が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=$ $\boxed{カキ}$ である。

(4)　関数 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}$ の $x=5$ における微分係数は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

(5)　関数 $f(x)=3x^2+x\displaystyle\int_0^2 f(t)dt+a$ が $f(2)=0$ を満たすとき，$a=\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ である。

(6)　分母が 3 の累乗で，0 より大きく 1 より小さい既約分数を並べた数列

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{2}{27},\ \frac{4}{27},\ \cdots$$

について，第 $\boxed{スセソ}$ 項は $\dfrac{728}{729}$ であり，初項から第 $\boxed{スセソ}$ 項までの和は $\boxed{タチツ}$ である。

(7)　$\triangle$ABC において AB $=36$，AC $=28$，BC $=48$，$\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，BD $=$ $\boxed{テト}$，AD $=$ $\boxed{ナニ}$ である。

(8)　ベクトル $\vec{a}=(56,\ -33)$，$\vec{b}=(12,\ 5)$ がある。$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ $\boxed{ヌネ}$ のとき最小値 $\boxed{ノハ}$ をとる。

(9)　2 つの実数 x，y が $\left(\dfrac{2+\sqrt{-77}}{9}\right)^{2021}=\dfrac{x+y\sqrt{-77}}{9}$ を満たすとき，$x^2+77y^2=$ $\boxed{ヒフ}$ である。

(10)　実数 k に対して 3 次方程式 $x^3+(4-k)x^2+(k+13)x+15-3k=0$ が異なる 3 つの整数解 α，β，γ を持ち，$2\beta=\alpha+\gamma$ のとき，$k=$ $\boxed{ヘホ}$ である。

解答

解答記号	正解
アイ	-4
$\dfrac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$	$\dfrac{-1}{6}$
カキ	14
$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$	$\dfrac{3}{8}$
$\dfrac{\text{コサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{-4}{3}$

解答記号	正解
スセソ	728
タチツ	364
テト	27
ナニ	21
ヌネ	-3
ノハ	52
ヒフ	81
ヘホ	13

解説

(1)　5 つのデータの平均が 5 なので，

$$\frac{-14+16+21+a+b}{5}=5 \iff a+b=2\cdots①$$

また，分散が 164 なので，

$$\frac{(-14-5)^2+(16-5)^2+(21-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{5}=164$$
$$\iff (a-5)^2+(b-5)^2=82\cdots②$$

①, ② より $(a,\ b)=(6,\ -4),\ (-4,\ 6)$ が得られるが，$a<b$ より $(a,\ b)=(-4,\ 6)$ と定まる．
したがって，$a=\mathbf{-4}$ である．

(2)　与式の左辺を合成すると，$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となる．
さらに $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$ を用いると，$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ と表される．
したがって，$a=\mathbf{-\dfrac{1}{6}}$ である．

別解

与式の左辺を変形して，

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\right)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

したがって，$a=\mathbf{-\dfrac{1}{6}}$ である．

(3)　辺々に常用対数をとると，$x\log_{10}5000=y\log_{10}2000=\dfrac{1}{2}$.
これより，$x=\dfrac{1}{2\log_{10}5000}$，$y=\dfrac{1}{2\log_{10}2000}$ が得られる．これらを与式に代入して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=2(\log_{10}5000+\log_{10}2000)\\&=2\{(3+\log_{10}5)+(3+\log_{10}2)\}=2(6+\log_{10}10)\\&=\mathbf{14}\end{aligned}$$

(4) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)$ であるので，$x=5$ における微分係数は，

$$f'(5)=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{5}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

$\boxed{\text{別解}}$

$f(x)$ の定義域が $x \geqq 3$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{x+\sqrt{x^2-9}}\\&=\sqrt{\frac{(x+3)+(x-3)+2\sqrt{(x+3)(x-3)}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

と変形できる．

よって $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)$ となるので， $x=5$ における微分係数は，

$$f'(5)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(5) $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=k$ とおくと，$f(x)=3x^2+kx+a$ と表すことができる．

このとき，$k=\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(3t^2+kt+a)dt=\left[t^3+\frac{kt^2}{2}+at\right]_0^2=8+2k+2a$ であることから，

$k=-2a-8$ が分かり，$f(x)=3x^2-2(a+4)x+a$ となる．$f(2)=-3a-4=0$ より，$a=\boldsymbol{\dfrac{-4}{3}}$ である．

(6)

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\ \Big|\ \frac{1}{27},\ \frac{2}{27},\ \frac{4}{27},\ \cdots$$

のように分けて左から順に第 1 群，第 2 群，$\cdots$ ，第 n 群とすると，第 n 群の項数は $3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$ である．

$\dfrac{728}{729}=\dfrac{3^6-1}{3^6}$ は第 6 群の末項であるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2\cdot 3^{k-1}=\frac{2(3^6-1)}{3-1}=728$ より，$\dfrac{728}{729}$ は第 **728** 項である．

また，第 n 群の総和は足し算の順序を工夫することにより，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3^n}+\frac{2}{3^n}+\frac{4}{3^n}+\cdots+\frac{3^n-4}{3^n}+\frac{3^n-2}{3^n}+\frac{3^n-1}{3^n}\\&=\left(\frac{1}{3^n}+\frac{3^n-1}{3^n}\right)+\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3^n-2}{3^n}\right)+\left(\frac{4}{3^n}+\frac{3^n-4}{3^n}\right)+\cdots\\&=1\cdot\frac{2\cdot 3^{n-1}}{2}=3^{n-1}\end{aligned}$$

であるので，初項から第 728 項までの和，つまり第 6 群末項までの和は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}3^{k-1}=\frac{3^6-1}{3-1}=\boldsymbol{364}$ である．

(7) 角の二等分線の性質より，BD : DC = AB : AC = 9 : 7 であるから，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\frac{9}{9+7}=\boldsymbol{27}$$

である．また，△ABC において余弦定理より，

$$\cos B = \frac{36^2 + 48^2 - 28^2}{2 \cdot 36 \cdot 48} = \frac{9^2 + 12^2 - 7^2}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{22}{27}$$

であるから，△ABD において余弦定理より，

$$\begin{aligned} \mathrm{AD}^2 &= 36^2 + 27^2 - 2 \cdot 36 \cdot 27 \cdot \frac{22}{27} \\ &= 9(144 + 81 - 176) = 9 \cdot 49 \end{aligned}$$

$\mathrm{AD} > 0$ より，$\mathrm{AD} = \mathbf{21}$.

別解

角の二等分線の長さは，公式を用いて計算すると次のようになる．

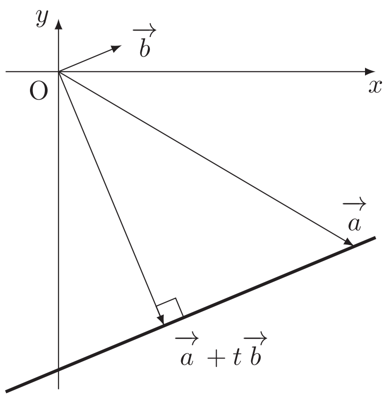
$$\begin{aligned} \mathrm{AD} &= \sqrt{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \cdot \mathrm{CD}} \\ &= \sqrt{36 \cdot 28 - 27 \cdot 21} \\ &= \sqrt{9(112 - 63)} = \sqrt{9 \cdot 49} = \mathbf{21} \end{aligned}$$

(8)　原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + t\vec{b}$ とすると，点 P は下図の太実線部分上にある．したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるのは，$\vec{a} + t\vec{b} \perp \vec{b}$ となる場合であるから，

$$\left(\vec{a} + t\vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0 \iff (56 + 12t,\ -33 + 5t) \cdot (12,\ 5) = 0$$

$12(56 + 12t) + 5(-33 + 5t) = 0$ より，$t = \mathbf{-3}$ を得る．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (20,\ -48)$ であるから，最小値は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{20^2 + 48^2} = \sqrt{16(25 + 144)} = \sqrt{16 \cdot 169} = \mathbf{52}$$



(9)　与条件から，$\left(\dfrac{2 + \sqrt{77}i}{9}\right)^{2021} = \dfrac{x + y\sqrt{77}i}{9} \cdots$① である．この両辺に対して共役な複素数をとることにより，$\left(\dfrac{2 - \sqrt{77}i}{9}\right)^{2021} = \dfrac{x - y\sqrt{77}i}{9} \cdots$② が得られる．①, ② を辺々かけることにより，$\left(\dfrac{4 + 77}{81}\right)^{2021} = \dfrac{x^2 + 77y^2}{81}$ となる．この左辺は 1 となるので，$x^2 + 77y^2 = \mathbf{81}$ である．(① の両辺の絶対値をとってもよい)

(10)　$2\beta = \alpha + \gamma \cdots$① とする．また，解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -4 + k & \cdots ② \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = k + 13 & \cdots ③ \\ \alpha\beta\gamma = -15 + 3k & \cdots ④ \end{cases}$$

が得られる．

①, ② から，$k = 3\beta + 4 \cdots$⑤

①, ③ から，$2\beta^2 + \alpha\gamma = k + 13$ が得られるので，これと ④ から $\alpha\gamma$ を消去すると $\beta(-2\beta^2 + k + 13) = -15 + 3k$ となる．これと ⑤ から k を消去して整理すると，

$$2\beta^3 - 3\beta^2 - 8\beta - 3 = 0 \iff (\beta + 1)(\beta - 3)(2\beta + 1) = 0$$

が得られる．β が整数であることから $\beta = -1,\ 3$ に絞られる．

(i)　$\beta = -1$ のとき

① から $\alpha + \gamma = -2$.

⑤ から $k = 1$ なので ④ から $\alpha\gamma = \dfrac{-15 + 3k}{\beta} = 12$.

これらを満たす整数 $\alpha,\ \gamma$ の組はないので不適.

(ii)　$\beta = 3$ のとき

① から $\alpha + \gamma = 6$.

⑤ から $k = 13$ なので ④ から $\alpha\gamma = 8$.

これらを満たす整数 $\alpha,\ \gamma$ の組は 2, 4 なので適する.

以上から $k = \mathbf{13}$.

問題 2

1, 2, 11, 12 の数字の 1 つが書かれたボールが各 1 個ずつ袋の中に入っている。この袋からボールを 1 個取り出してボールの数字を書きとめ，ボールを袋に戻す操作を 3 回行う。3 つの数字を取り出した順に左から右に並べて 1 つの整数を作る。例えば 1, 2, 2 の書かれたボールが順に取り出された場合は 3 桁の整数 122 が，11, 12, 1 の書かれたボールが順に取り出された場合は 5 桁の整数 11121 ができる。次の問いに答えよ。

(1) できた整数が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) できた整数が 3 の倍数となる確率を求めよ。

(3) 何通りの整数を作ることができるか。

解答

(1)(2) においては 1 回目，2 回目，3 回目に取り出されるボールをすべて区別し，確率の分母をその取り出し方の総数である 4^3 としておく．

(1) できた整数が 4 の倍数となるのは下 2 桁が 4 の倍数となるときであるから，その下 2 桁は 12 となるしかない．このようになるボールの取り出し方は以下の通りである（$\star$ は任意のボールを表す）．

1 回目	2 回目	3 回目	場合の数
$\star$	$\star$	12	$4^2 = 16$ 通り
$\star$	1	2	4 通り
$\star$	11	2	4 通り

以上により，求める確率は $\dfrac{16+4+4}{64} = \boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$ である．

(2) できた整数が 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数となるときである．ここで，それぞれのボールの各位の数の和は次のようになっている．

ボール	各位の数の和
1	1（ 3 で割って余りが 1 ）
2	2（ 3 で割って余りが 2 ）
11	2（ 3 で割って余りが 2 ）
12	3（ 3 で割り切れる ）

よって 4 つのボールを $A = \{1\}$，$B = \{2,\ 11\}$，$C = \{12\}$ という 3 つの集合に分けると，各位の数の和が 3 の倍数となるのは次のような取り出し方をした場合である．

取り出すボールの種類	使うボール	場合の数
$A,\ A,\ A$	3 個とも 1	1
$B,\ B,\ B$	3 個とも 2 あるいは 12	$2^3 = 8$
$C,\ C,\ C$	3 個とも 12	1
$A,\ B,\ C$	1, 2, 12 あるいは 1, 11, 12	$2 \times 3! = 12$

以上により，求める確率は $\dfrac{1+8+1+12}{64} = \boldsymbol{\dfrac{11}{32}}$ である．

(3) できあがる整数が何桁になるかで場合分けする．

(i) 3 桁の場合，使うボールが 3 つとも 1 あるいは 2 であるから，$2^3 = 8$ 通りできる．

(ii) 4 桁の場合，3 回ボールを取り出してできる 4 桁の数全体の集合には次の 3 つのタイプの部分集合が考えられる．以下では集合 A の要素の個数を $n(A)$ などと表すことにする．

$$A = \{\,○,\ ○,\ 1○\text{の順に取り出されてできる 4 桁の数}\,\}$$
$$B = \{\,○,\ 1○,\ ○\text{の順に取り出されてできる 4 桁の数}\,\}$$
$$C = \{1○,\ ○,\ ○\text{の順に取り出されてできる 4 桁の数}\,\}$$

ここで，各○はそれぞれ 1 か 2 であることに注意しておく．このとき，4 桁の数全体の集合の個数は $n(A \cup B \cup C)$

である．まず

$$n(A) = n(B) = n(C) = 2^3 = 8$$

である．次に

$A \cap B$ は 「○ 11 ○」 の形をした 4 桁の整数の集合であるから，$n(A \cap B) = 2^2 = 4$
$B \cap C$ は 「11 ○○」 の形をした 4 桁の整数の集合であるから，$n(B \cap C) = 2^2 = 4$
$C \cap A$ は 「1 ○ 1 ○」 の形をした 4 桁の整数の集合であるから，$n(C \cap A) = 2^2 = 4$

となり，さらに

$A \cap B \cap C$ は 「111 ○」 の形をした 4 桁の整数の集合であるから，$n(A \cap B \cap C) = 2$

となるので，4 桁の数の個数は全部で

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - \{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + n(A \cap B \cap C) \\ &= 8 + 8 + 8 - (4 + 4 + 4) + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

通りできる．

(iii)　5 桁の場合，3 回ボールを取り出してできる 5 桁の数全体の集合には次の 3 つのタイプの部分集合が考えられる．

$D = \{$ ○，1 ○，1 ○の順に取り出されてできる 5 桁の数 $\}$
$E = \{$1 ○，1 ○，○の順に取り出されてできる 5 桁の数 $\}$
$F = \{$1 ○，○，1 ○の順に取り出されてできる 5 桁の数 $\}$

ここで, 各○はそれぞれ 1 か 2 であることに注意しておく．このとき, 5 桁の数全体の集合の個数は $n(D \cup E \cup F)$ である．まず,

$$n(D) = n(E) = n(F) = 2^3 = 8$$

である．次に

$D \cap E$ は「1111 ○」の形をした 5 桁の整数の集合であるから，$n(D \cap E) = 2$
$E \cap F$ は「1 ○ 11 ○」の形をした 5 桁の整数の集合であるから，$n(E \cap F) = 2^2 = 4$
$F \cap D$ は「11 ○ 1 ○」の形をした 5 桁の整数の集合であるから，$n(F \cap D) = 2^2 = 4$

となり，さらに

$D \cap E \cap F$ は「1111 ○」の形をした 5 桁の整数の集合であるから，$n(D \cap E \cap F) = 2$

となるので，5 桁の数の個数は全部で

$$\begin{aligned} n(D \cup E \cup F) &= n(D) + n(E) + n(F) - \{n(D \cap E) + n(E \cap F) + n(F \cap D)\} + n(D \cap E \cap F) \\ &= 8 + 8 + 8 - (2 + 4 + 4) + 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

通りできる．

(iv)　6 桁の場合，使うボールが 3 つとも 11 あるいは 12 であるから，$2^3 = 8$ 通りできる．

以上により，求める整数は $8 + 14 + 16 + 8 = \mathbf{46}$ 通りできる．

別解

全数数え上げを行うと次のようになる．できあがる数が何桁になるかで場合分けをするのは上と同様であるが，4 桁と 5 桁の場合は，2 を何個使うかで場合分けするとよいだろう．

(i)　3 桁の場合，本解と同様に考えて 8 通りである．

(ii)　4 桁の場合，2 を何個使うかで場合分けする．この際 4 桁の数が，1，2，11，12 から作ることが出来るかどうかを数えていく（下表では仕切りを入れて 3 個のボールを区別している．また，可能であれば○にしているが，その場合の仕切りの入れ方は複数通りある場合もある）．

2 の個数	並び	1，2，11，12 から作られるか
0	1111	○
1	1112	○
	1121	○
	1211	○
	2111	○
2	1122	○
	1212	○
	1221	○
	2112	○
	2121	○
	2211	○
3	1222	○
	2122	○
	2212	○
	2221	×

以上により 4 桁の数は $1+4+6+3=14$ 通りできる．

(iii)　5 桁の場合も同様に 2 を何個使うかで場合分けをする．

2 の個数	並び	1，2，11，12 から作られるか
0	11111	○
1	11112	○
	11121	○
	11211	○
	12111	○
	21111	○
2	11122	○
	11212	○
	11221	×
	12112	○
	12121	○
	12211	○
	21112	○
	21121	×
	21211	○
	22111	×
3	11222	×
	12122	○
	12212	○
	12221	×
	21122	×
	21212	○
	21221	×
	22112	×
	22121	×
	22211	×

以上により 5 桁の数は $1+5+7+3=16$ 通りできる．

(iv)　6 桁の場合，本解と同様に考えて 8 通りである．

以上により，整数は **46** 通りできる．

問題 3

次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上で，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対し，

$$\{x(x-2)+y^2\}(x\tan\theta - y) \geqq 0 \text{ かつ } y \geqq 0 \text{ かつ } 0 \leqq x \leqq 2$$

を満たす領域を図示せよ。

(2) (1) の領域を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積の最小値と，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

解答

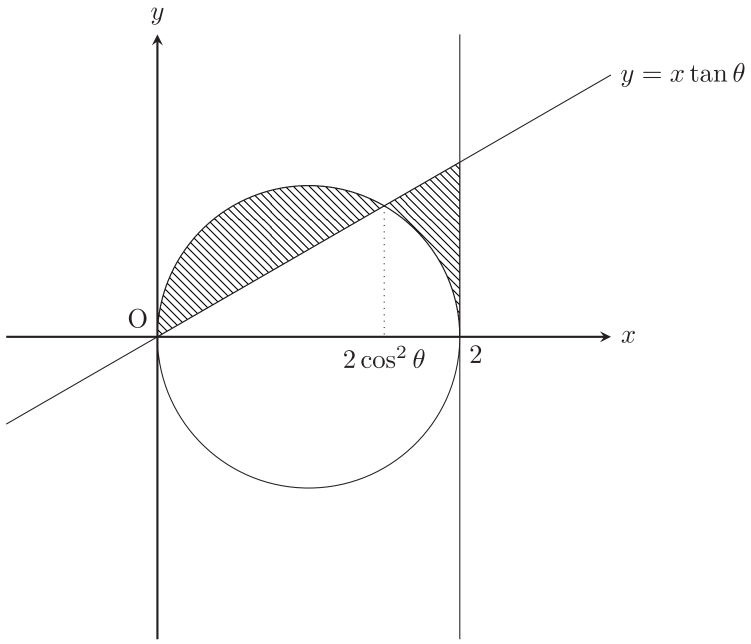
(1)

$$\{x(x-2)+y^2\}(x\tan\theta - y) \geqq 0$$

$$\iff \begin{cases} x(x-2)+y^2 \geqq 0 \\ x\tan\theta - y \geqq 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x(x-2)+y^2 \leqq 0 \\ x\tan\theta - y \leqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \geqq 1 \\ y \leqq x\tan\theta \end{cases} \text{または} \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leqq 1 \\ y \geqq x\tan\theta \end{cases}$$

となるので，与不等式を満たす領域は下図の斜線部である（境界を含む）.



(2) $x^2-2x+y^2=0$ と $y = x\tan\theta$ を連立して解くと，$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ であるので，(1) の領域を x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積は,

$$\int_0^{2\cos^2\theta} \pi(-x^2+2x)\,dx - \int_0^{2\cos^2\theta} \pi(x\tan\theta)^2\,dx + \int_{2\cos^2\theta}^{2} \pi(x\tan\theta)^2\,dx - \int_{2\cos^2\theta}^{2} \pi(-x^2+2x)\,dx$$

（以下，$\alpha = \cos^2\theta$ とおく）

$$= \int_0^{2\alpha} \pi(-x^2+2x)\,dx - \int_0^{2\alpha} \pi\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)x^2\,dx + \int_{2\alpha}^{2} \pi\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)x^2\,dx - \int_{2\alpha}^{2} \pi(-x^2+2x)\,dx$$

$$= \pi\left\{\int_0^{2\alpha}\left(2x-\frac{x^2}{\alpha}\right)dx - \int_{2\alpha}^{2}\left(2x-\frac{x^2}{\alpha}\right)dx\right\}$$

$$= \pi\left\{\left[x^2-\frac{x^3}{3\alpha}\right]_0^{2\alpha} - \left[x^2-\frac{x^3}{3\alpha}\right]_{2\alpha}^{2}\right\}$$

$$= \pi \left\{ \left(4\alpha^2 - \frac{8}{3}\alpha^2 \right) \cdot 2 - \left(4 - \frac{8}{3\alpha} \right) \right\}$$

$$= \frac{8}{3}\pi \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} \right) - 4\pi$$

となる.

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

とおくと,

$$f'(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2\alpha^3 - 1}{\alpha^2}$$

より，$f(\alpha)$ の増減は以下の通りである.

α	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

以上より，$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ すなわち $\cos\theta = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}}$ のとき体積は最小となる.

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} + \sqrt[3]{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ となるので，体積の最小値は，$\boldsymbol{4(\sqrt[3]{2} - 1)\pi}$ である.

別解

$f(\alpha)$ の最小値は，$\alpha > 0$ より以下の通り相加平均・相乗平均の関係を用いて求めることもできる.

$$f(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \geqq 3\sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{1}{2\alpha}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

等号は，$\alpha^2 = \dfrac{1}{2\alpha}$ のとき，すなわち $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき成立するので，このとき，$f(\alpha)$ の最小値は $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ である.

講評

問題 1［小問集合］((1) 易 (2) 易 (3) 易 (4) 易 (5) 易 (6) 標準 (7) やや易 (8) やや易 (9) やや難 (10) やや難)

昨年度より難易度は下がった．しかし計算が大変な問題も含まれており，要領よく解かないと時間を浪費してしまうだろう．

(6)　第 k 群の項数が $3^k - 3^{k-1} = 2 \cdot 3^{k-1}$ 個と気づくとあとは典型的な群数列の問題．

(8)　ベクトルの長さを求めにいくと計算が大変．$\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$ のときに長さが最小となることを利用すると楽．

(9)　もとの複素数とその共役複素数の積を求める．

できない問題はどんどん後回しにしてできる問題で稼げるだけ稼ぐべきである．

問題 2［場合の数・確率］（難）

1，2，11，12 の 4 つの数から 3 つを選んで一列に並べ，整数を作る問題である．(1) は下 2 桁が 12 になる場合を考えればよく，(2) は各位の数の和が 3 の倍数となる場合を考えればよい．その場合を漏れなく書き出せるかどうかがポイントとなる．(3) は，場合の数を考えるため重複なく求める必要があるが，時間内に完答するのは難しいだろう．

問題 3［図形と式・数III積分］（やや難）

不等式の表す領域の図示とその領域を x 軸の回りに回転させてできる立体の体積の最小値を求める問題．計算が少々複雑であるが，解法の流れなどは典型的な問題であった．(2) では，直線部分の回転体の体積を求める際に円錐を用いてもよい．最小値に関しては，$\cos^2\theta = t$ などと置換すれば少し求めやすくなる．微分して増減表を書いてもよいが，相加平均・相乗平均を用いる手段もある．

小問集合は穏やかな難易度の問題が多いが，計算量は多く，処理力で大きく差が付きそうである．大問については，問題 2 の後半，および問題 3 の後半は正解に達しにくく，ここを突破すればかなり有利だが，得点できていない受験生が多いだろう．1 次合格のための目標は 60%.