解答速報

大阪医科大学（後期）　数学

2021年 3月10日実施

〔1〕 a を実数とし，$f(x)=x^2-4ax+a$，$g(x)=-x^2-2ax-a$ とする。

(1) すべての実数 x に対し $f(x) \geqq g(x)$ であるための a の条件を求めよ。

(2) すべての実数 x_1，x_2 に対し $f(x_1)>g(x_2)$ であるための a の条件を求めよ。

(3) $f(x) \geqq g(x)$ がすべての実数 x について成り立ち，かつ $f(x_1) \leqq g(x_2)$ である実数 x_1，x_2 が存在するための a の条件を求めよ。

解答

(1) $f(x)-g(x)=2x^2-2ax+2a \geqq 0$ がすべての実数で成り立てばよいので，$2x^2-2ax+2a=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-4a \leqq 0 \iff \boldsymbol{0 \leqq a \leqq 4}$$

(2) 題意を満たすためには，

$$\bigl(y=f(x)\text{ の最小値}\bigr)>\bigl(y=g(x)\text{ の最大値}\bigr)$$

であることが必要十分である．

$f(x)=(x-2a)^2-4a^2+a$，$g(x)=-(x+a)^2+a^2-a$ であることから，

$$-4a^2+a>a^2-a \iff 5a^2-2a<0 \iff \boldsymbol{0<a<\frac{2}{5}}$$

(3) $f(x) \geqq g(x)$ がすべての実数 x について成り立つ条件は，(1) の結果から $0 \leqq a \leqq 4 \cdots$① である．

また，「$f(x_1) \leqq g(x_2)$ である実数 x_1，x_2 が存在する」という命題は，(2) の「すべての実数 x_1，x_2 に対し $f(x_1)>g(x_2)$ である」の否定であることから，その条件は $a \leqq 0$，$\dfrac{2}{5} \leqq a \cdots$② である．

①，② より求める a の条件は $\boldsymbol{a=0}$ **または** $\boldsymbol{\dfrac{2}{5} \leqq a \leqq 4}$.

〔2〕 曲線 $y=\sin x$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ \sin a)$, $\mathrm{B}(b,\ \sin b)$, $(a \fallingdotseq b)$ をとり，A, B での接線をそれぞれ l_{A}, l_{B} とする。

(1) l_{A} と l_{B} が 1 点で交わるために a, b が満たすべき条件を求めよ。また，そのときの交点 P の座標を求めよ。

(2) $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $b=a+\dfrac{\pi}{2}$ のとき，交点 P の y 座標を $f(a)$ として，$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答

(1) $y=\sin x$ のとき $y'=\cos x$ であるから

$$l_{\mathrm{A}}\ :y=\cos a(x-a)+\sin a=x\cos a-a\cos a+\sin a,$$
$$l_{\mathrm{B}}\ :y=x\cos b-b\cos b+\sin b$$

である．

l_{A} と l_{B} が 1 点で交わるためには傾きが異なることが必要十分である．したがって求める条件は

$$\begin{aligned}
&\cos a \fallingdotseq \cos b\\
\Longleftrightarrow\ & -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \fallingdotseq 0\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{a\pm b}{2} \fallingdotseq n\pi \quad (n\text{ は整数})\\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{a\pm b \fallingdotseq 2n\pi \quad (n\text{ は整数})}
\end{aligned}$$

である．

交点は連立方程式

$$\begin{cases} y=x\cos a-a\cos a+\sin a\\ y=x\cos b-b\cos b+\sin b\end{cases}$$

を解いて

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{a\cos a-b\cos b-\sin a+\sin b}{\cos a-\cos b}}\ ,\ \boldsymbol{\frac{(a-b)\cos a\cos b-\sin(a-b)}{\cos a-\cos b}}\right)$$

となる．

(2) $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $b=a+\dfrac{\pi}{2}$ の場合 $\dfrac{\pi}{2} \leqq a+b \leqq \dfrac{3\pi}{2}$, $a-b=-\dfrac{\pi}{2}$ であるから，(1) により l_{A}, l_{B} は交わる．P の y 座標に $b=a+\dfrac{\pi}{2}$ を代入して

$$\begin{aligned}
f(a)&=\frac{-\dfrac{\pi}{2}\cos a\cos\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos a-\cos\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)}\\
&=\frac{\dfrac{\pi}{2}\cos a\sin a+1}{\cos a+\sin a}
\end{aligned}$$

$\cos a+\sin a=t$ とおく．$t=\cos a+\sin a=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より $1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である．

$t^2=\cos^2 a+2\cos a\sin a+\sin^2 a=1+2\cos a\sin a$ であるから

$$f(a)=\frac{\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{t^2-1}{2}+1}{t}=\frac{\pi t^2+4-\pi}{4t}$$

と表される．これを $g(t)$ とおく．

$g'(t) = \dfrac{\pi t^2 - (4-\pi)}{4t^2}$ より $1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ において $g'(t) > 0$ である．つまり $g(t)$ は単調増加で，

$f(a)$ の**最小値**は $g(1) = \mathbf{1}$，**最大値**は $g\left(\sqrt{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8}}$ である．

〔3〕 1 枚の硬貨を兄，弟の 2 人が兄から始めて交互に投げる。投げる度に，表が出れば投げた人は 1 点を得て，裏が出れば点は得られない。2 人の硬貨投げの合計回数を n と表す。n 回まで硬貨投げが済んだときの兄，弟のそれぞれの合計得点を A_n，B_n とおく。

(1) $A_8 = 1,\ B_8 = 4$ になる確率を求めよ。

(2) $n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ のうちの 1 個以上の n で，$B_n - A_n = 3$ となる確率を求めよ。

解答

(1) $n = 8$ のとき，兄，弟ともに 4 回ずつ硬貨を投げている．$A_8 = 1,\ B_8 = 4$ になるためには，兄は 1 回が表で 3 回が裏，かつ，弟は 4 回とも表であればよい．題意が「$A_8 = 1$ かつ $B_8 = 4$ となる確率」であると解釈し，その確率を $P(A_8 = 1,\ B_8 = 4)$ とすると（以下でも同様の表記とする），兄，弟が投げた硬貨の表裏は独立事象であるから，

$$P(A_8 = 1,\ B_8 = 4) = {}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{64}}$$

注釈

もし，「$A_8 = 1$，$B_8 = 4$ となるそれぞれの確率」であれば，

$$P(A_8 = 1) = {}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$P(B_8 = 4) = {}_4\mathrm{C}_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

となる．

(2) $1 \leqq n \leqq 8$ なので，$0 \leqq A_n \leqq 4$ かつ $0 \leqq B_n \leqq 4$ である．よって，

$$B_n - A_n = 3 \iff (A_n,\ B_n) = (0,\ 3) \text{ または } (1,\ 4)$$

であり，n の値に注目すると以下の事象 $R,\ S,\ T,\ U$ に限られる．

$$\begin{array}{ccl} R & ; & A_6 = 0 \text{ かつ } B_6 = 3 \\ S & ; & A_7 = 0 \text{ かつ } B_7 = 3 \\ T & ; & A_8 = 0 \text{ かつ } B_8 = 3 \\ U & ; & A_8 = 1 \text{ かつ } B_8 = 4 \end{array}$$

それぞれの確率は，

$$P(R) = {}_3\mathrm{C}_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_3\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(S) = {}_4\mathrm{C}_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_3\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{128}$$

$$P(T) = {}_4\mathrm{C}_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_4\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

$$P(U) = {}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4\mathrm{C}_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

となる．

求めたいのは $P(R \cup S \cup T \cup U)$ である．

ここで，S が起こるのは，R が起こった後で兄が裏を出すときに限るので，$R \cup S = R$ である．よって，$R \cup S \cup T \cup U = R \cup T \cup U$ である．

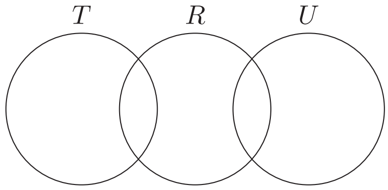
また，明らかに $T \cap U = \phi$ である．

$R \cap T$ となるには，R が起こった後で，兄が裏，弟が裏を出せばよく，また，$R \cap U$ となるには，R が起こった後で，兄が表，弟が表を出せばよい．よって，

$$P(R \cap T) = P(R) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{256}$$
$$P(R \cap U) = P(R) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{256}$$

となる．

（以上から，包含は右図のようなイメージとなる）

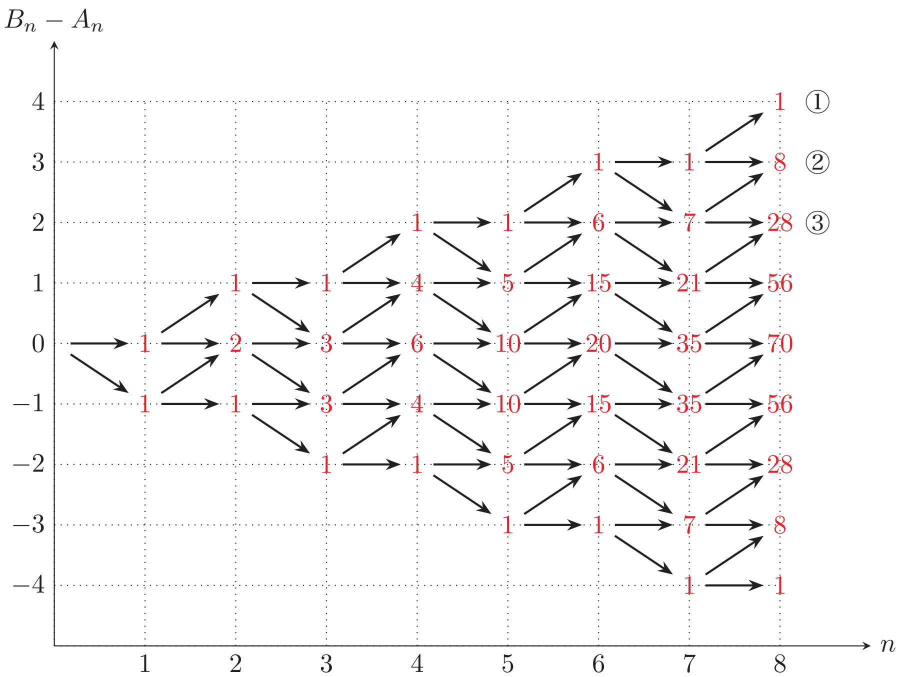


以上から，求める確率は

$$\begin{aligned} P(R \cup S \cup T \cup U) &= P(R \cup T \cup U) \\ &= P(R) + P(T) + P(U) - P(R \cap T) - P(R \cap U) \\ &= \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256} - \frac{1}{256} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{128}} \end{aligned}$$

別解

以下のように，横軸に n，縦軸に $B_n - A_n$ をとって $B_n - A_n$ の値の変化を調べてもよい．



図中の赤い数字は，左端の $n=0$ からの経路が何通りあるかを示している（パスカルの三角形と同じである）．経路の総数は $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k = 2^8 = 256$ 通りであり，これらはどれも同様に確からしい．これらの経路のうち，直線 $B_n - A_n = 3$ 上の点を少なくても 1 回通る経路の総数を考えると，

- ①, ② の $1+8=9$ 通りは適する
- ③ の 28 通りのうち，$(n,\ B_n - A_n) = (6,\ 3)$ を通る 1 通りは適する

とわかる．つまり $9+1=10$ 通りが適する．よって求める確率は，$\dfrac{10}{256} = \boldsymbol{\dfrac{5}{128}}$ である．

〔4〕 $\triangle$ABC において BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とする。

(1) $\triangle$ABC の辺 BC 上の点 P から，辺 AC，AB へそれぞれ垂線 PE，PF を下す。$\mathrm{PE}^2+\mathrm{PF}^2$ が最小値をとるとき，比 PB : PC を求めよ。なお，比は a，b，c を用いて表せ。

(2) 小問 (1) の最小値を与える辺 BC 上の定点を P とする。(1) の辺 BC の代わりにそれぞれ辺 CA，辺 AB に対して同様な考察を行い得られる CA 上の定点，AB 上の定点をそれぞれ Q，R とする。AP，BQ，CR は一点 M で交わることを示せ。

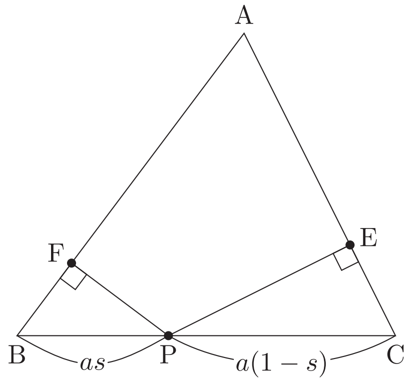
(3) $\triangle$ABC の内部の点 U から，三辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 UI，UJ，UK を下す。U が動くとき $T=\mathrm{UI}^2+\mathrm{UJ}^2+\mathrm{UK}^2$ は小問 (2) の点 M で最小となることを示せ。なお最小値は求めなくてよい。

注：試験中，問題冒頭に「鋭角三角形」を付け加えるように指示があった.

解答

(1) BP : PC $= s:(1-s)$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とおくと，PB $= as$，PC $= a(1-s)$ である.

$\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，



$$\sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

が成り立つので，

$$\mathrm{PE}=a(1-s)\sin C=\frac{ac(1-s)}{2R}$$

$$\mathrm{PF}=as\sin B=\frac{abs}{2R}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PE}^2+\mathrm{PF}^2&=\frac{a^2c^2(1-s)^2}{4R^2}+\frac{a^2b^2s^2}{4R^2}\\&=\frac{a^2(b^2+c^2)}{4R^2}s^2-\frac{a^2c^2}{2R^2}s+\frac{a^2c^2}{4R^2}\ (0\leqq s\leqq 1)\end{aligned}$$

この式を $f(s)$ とすると， $f'(s)=\dfrac{a^2(b^2+c^2)}{2R^2}s-\dfrac{a^2c^2}{2R^2}$ であり，$f'(s)=0$ のとき，$s=\dfrac{c^2}{b^2+c^2}$ を得る．この値は $0\leqq s\leqq 1$ を満たし，$y=f(s)$ のグラフは下に凸の放物線であることから，このとき $f(s)$ は最小となる．よって，

$$\mathrm{PB}:\mathrm{PC}=\frac{c^2}{b^2+c^2}:\left(1-\frac{c^2}{b^2+c^2}\right)=\boldsymbol{c^2:b^2}$$

(2) (1) と同様にすると，

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=c^2:a^2,\ \mathrm{AR}:\mathrm{RB}=b^2:a^2$$

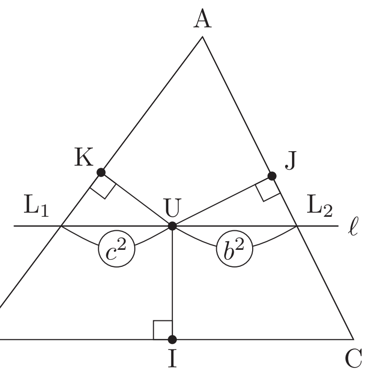
を得る．

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}=1$$

であるから，チェバの定理の逆より，線分 AP，BQ，CR は 1 点で交わることが示された． (証明終)

(3) 辺 BC に平行でかつ辺 AB，AC と交わる直線 ℓ を引き，ℓ と辺 AB，AC との交点をそれぞれ L_1，L_2 とする.

線分 L_1L_2 上に点 U をとるとき，直線 ℓ と辺 BC の距離に関わらず，UJ^2+UK^2 が最小となるのは (1) より $L_1U:L_2U=c^2:b^2$ となるときである．よって，点 U は (2) のときの定点 P について，線分 AP 上にあることが分かる．他の辺についても同様の事が言えるので，T が最小となるのは，U が (2) で求めた点 M と一致するときであることが示された．　(証明終)



$\boxed{\text{参考}}$

(3) を実現する点 M は「ルモアーヌ点」と呼ばれるものである．

三角形 ABC の面積を S とする． $UI=r_a$，$UJ=r_b$，$UK=r_c$ とおくと，面積について

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar_a+\frac{1}{2}br_b+\frac{1}{2}cr_c \\ &= \frac{1}{2}(ar_a+br_b+cr_c) \end{aligned}$$

より

$$4S^2=(ar_a+br_b+cr_c)^2$$

が成り立っている．ここで，コーシー・シュワルツの不等式により

$$(ar_a+br_b+cr_c)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)({r_a}^2+{r_b}^2+{r_c}^2)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} T &= UI^2+UJ^2+UK^2 \\ &= {r_a}^2+{r_b}^2+{r_c}^2 \\ &\geqq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

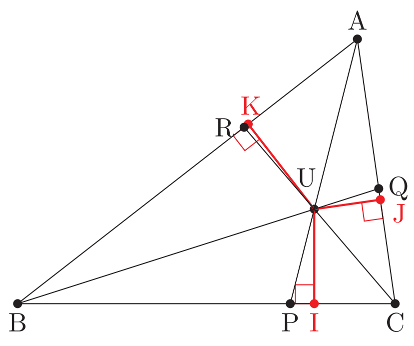
が成り立つ．この不等式の等号は $a:b:c=r_a:r_b:r_c$ のとき成立するから，このとき

$$\triangle UBC:\triangle UCA:\triangle UAB=a^2:b^2:c^2$$

が成り立っている．したがって

$$PB:PC=\triangle UAB:\triangle UCA=c^2:b^2$$

などが成り立つので T を最小にする点は (2) で求めた点 M であることがわかる．



〔5〕 $a>0,\ b>0$ とする。xy 座標平面上に点 A$(a,\ 0)$，点 B$(0,\ b)$ をとり，直線 AB に関して原点 O と対称の位置にある点を P$(u,\ v)$ とする。

(1) $a,\ b$ を $u,\ v$ で表せ。

(2) $ab=1$ を満たしながら A，B が動くとき，点 P が描く曲線の極方程式を

$$r^2=f(\theta)\left(r>0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

と表す。$f(\theta)$ を求めよ。

解答

(1) OP の中点 $\left(\frac{u}{2},\ \frac{v}{2}\right)$ は直線 AB : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 上にあるので,

$$\frac{u}{2a}+\frac{v}{2b}=1\ \cdots\ ①$$

また，直線 AB の法線ベクトルと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平行なので,

$$(u,\ v)\parallel\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)\parallel(b,\ a)$$

より，

$$b=ku,\ a=kv\ \cdots\ ②$$

とおく．これを①に代入すると，

$$\frac{u}{2kv}+\frac{v}{2ku}=1$$

より，$k=\dfrac{u^2+v^2}{2uv}$ が得られる．これを②に代入して，

$$\boldsymbol{a=\frac{u^2+v^2}{2u},\ b=\frac{u^2+v^2}{2v}}$$

である．

(2) 前問の解を $ab=1$ に代入すると，

$$\frac{(u^2+v^2)^2}{4uv}=1$$

である．$u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}&\frac{r^4}{4r\cos\theta\cdot r\sin\theta}=1\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{r^2}{4\sin\theta\cos\theta}=1\\ \Longleftrightarrow\ &r^2=2\sin 2\theta\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{f(\theta)=2\sin 2\theta}$ である．

講評

〔1〕［2 次関数］（標準）(2)(3) は 2 次関数の最大最小を 2 つの独立変数で考える問題である．類題が多数あり，このタイプの問題を経験したことがあるかどうかで大きく差がつきそうである．

〔2〕［数学Ⅲの微分法］（やや難）(1) では立式は難しくないが計算がやや煩雑で，方針は立っても正解までたどり着くことはなかなか難しかったと思われる．(2) は $\sin a + \cos a$ を置き換えるとやや簡単になる．計算力で差がつきそうな問題である．

〔3〕［確率］（やや難）(1) は題意が「$A_8 = 1$ かつ $B_8 = 4$ となる確率」であると解釈して答えても，個々に確率を出しても問題はないであろう．(2) は $B_n - A_n = 3$ となる場合を個々に求めていけばよいが，重複を除きつつ計算するのが大変で，完答は難しいと思われる．

〔4〕［図形と計量］（難）(1) は PE と PF の長さを表すことができるかがポイントとなるが，自力ではなかなか思いつかないであろう．(2) はチェバの定理の逆を用いる典型的な問題なので，(1) が解ければそれほど難しくはない．(3) は (1) を利用すればいいのだが，(1) と同様にかなり難しい．

〔5〕［極座標］（標準）(1) は「u, v を a, b で表せ」であれば通常の対称点の求め方と同じ感覚であるが，実際は「a, b を u, v で表せ」であるので少し注意が必要．ただししっかり得点したいところではある．(2) は (1) がミスなく取れていれば極座標の定石通り $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ を代入するだけであるので得点しやすい．

2021 年前期より難化して，2020 年後期と同じくらいの難しさとなった．〔1〕,〔5〕は完答したいが，〔2〕～〔4〕はどれも手が付きにくい設問が含まれており完答は難しいだろう．目標は 60%．