解答速報

大阪医科大学（前期）　数学

2021年 2月11日実施

〔1〕　$a>0$ を定数とし，$I=\displaystyle\int_0^a e^{-x}\sqrt{a-x}\,dx$ とおく。

(1)　$0 \leqq x \leqq a$ において，$\dfrac{a-x}{\sqrt{a}} \leqq \sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}$ を示せ。

(2)　$\sqrt{a}-\dfrac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}} \leqq I \leqq \sqrt{a}-\sqrt{a}e^{-a}$ を示せ。

解答

(1)　まず，$0 \leqq x \leqq a$ より $\sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}\cdots$① は明らかである．次に，① の両辺に $\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}}(\geqq 0)$ をかけると

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}} \leqq \sqrt{a-x}$$

となるので，

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}} \leqq \sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}$$

が成り立つ．　（証明終）

(2)　(1) の結果より

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}}e^{-x} \leqq e^{-x}\sqrt{a-x} \leqq \sqrt{a}e^{-x}$$

であるから，

$$\int_0^a \frac{a-x}{\sqrt{a}}e^{-x}\,dx \leqq \int_0^a e^{-x}\sqrt{a-x}\,dx \leqq \int_0^a \sqrt{a}e^{-x}\,dx$$

が成り立つ．この不等式について，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^a (a-x)e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left[(x-a+1)e^{-x}\right]_0^a \\ &= \sqrt{a}-\frac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \sqrt{a}\int_0^a e^{-x}\,dx \\ &= \sqrt{a}\left[-e^{-x}\right]_0^a \\ &= \sqrt{a}-\sqrt{a}e^{-a}\end{aligned}$$

であるので，

$$\sqrt{a}-\frac{1-e^{-a}}{\sqrt{a}} \leqq I \leqq \sqrt{a}-\sqrt{a}e^{-a}$$

が成り立つ．（証明終）

的中!!

積分の不等式を入試前日に確認！

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x}dx < \int_1^2 \log x dx$ を示せ．

(2) 自然数 k, n に対し，$x_k = \dfrac{k}{n}$ とするとき，

$$\frac{2}{n\pi(1+x_k^2)} \leqq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{|\sin n\pi x|}{1+x^2}dx \leqq \frac{2}{n\pi(1+x_{k-1}^2)}$$

を示せ．

(3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ が減少関数であることを用いて，$\dfrac{2}{\pi} < \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx < \pi$ を示せ．

〔2〕 袋の中に赤札が 3 枚，青札が 3 枚入っている。A さんは，この袋から無作為に札を 3 枚取り出して箱の中に入れる。B さんは，この箱の中から札を 1 枚取り出し，色を確認して箱に戻すという操作を繰り返し行う。

(1) A さんが箱の中に入れた 3 枚の札のうちで赤札の枚数が 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ求めよ。

(2) B さんが箱から最初に取り出した札が赤札である確率を求めよ。

(3) B さんが箱から 1 回目，2 回目に取り出した札がどちらも赤札である確率を求めよ。

(4) B さんが箱から札を n 回取り出して，それがすべて赤札だったとする。箱の中の 3 枚の札がすべて赤札である確率を求めよ。

解答

(1) 赤札の枚数が 0 になるのは A さんが 3 枚とも青札を取り出す場合で，その確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \mathbf{\dfrac{1}{20}}$.

赤札の枚数が 1 になるのは A さんが赤札を 1 枚，青札を 2 枚取り出す場合で，その確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3} = \mathbf{\dfrac{9}{20}}$.

赤札の枚数が 2 になるのは A さんが赤札を 2 枚，青札を 1 枚取り出す場合で，その確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3} = \mathbf{\dfrac{9}{20}}$.

赤札の枚数が 3 になるのは A さんが 3 枚とも赤札を取り出す場合で，その確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3} = \mathbf{\dfrac{1}{20}}$.

(2) (1) のそれぞれの場合に B さんが赤札を引く確率を考える.

$$\frac{1}{20} \times \frac{0}{3} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{3} = \frac{30}{60} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(6 枚の札の出やすさは同様に確からしいことからも，答が $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ であることはわかる.)

(3) (2) と同様に考える.

$$\frac{1}{20}\left(\frac{0}{3}\right)^2 + \frac{9}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{9}{20}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{20}\left(\frac{3}{3}\right)^2 = \frac{0+9+36+9}{180} = \frac{54}{180} = \mathbf{\frac{3}{10}}$$

(4) B さんが箱から札を n 回取り出して，それがすべて赤札である事象を X, 箱の中の 3 枚の札がすべて赤札である事象を Y とすると，求める確率は $P_X(Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \dfrac{P(Y)}{P(X)}$ である. ここで

$$P(X) = \frac{1}{20}\left(\frac{0}{3}\right)^n + \frac{9}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{20}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{20}\left(\frac{3}{3}\right)^n = \frac{9 + 9 \cdot 2^n + 3^n}{20 \cdot 3^n}$$

$$P(Y) = \frac{1}{20}$$

したがって求める確率は $\mathbf{\dfrac{3^n}{9 + 9 \cdot 2^n + 3^n}}$ である.

〔3〕 α を $|\alpha| = 1,\ \alpha \neq 1$ なる複素数とする。複素数平面上の点の列 $z_1,\ z_2,\ \cdots$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_{n+1} = \alpha z_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1) すべての正整数 n について $z_{n+1} - \beta = \alpha(z_n - \beta)$ を満たす複素数 β を求めよ。

(2) $z_m = z_n$ となる相異なる正整数 $m,\ n$ が存在するとき $\alpha^{|m-n|} = 1$ であることを示せ。

(3) α は，ある無理数 r により $\alpha = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$ と表されるとする。このときすべての相異なる正整数 $m,\ n$ に対し $z_m \neq z_n$ であることを示せ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) $z_{n+1} = \alpha z_n + 1$ を変形して，

$$z_{n+1} - \frac{1}{1-\alpha} = \alpha\left(z_n - \frac{1}{1-\alpha}\right) \cdots ① \qquad (\alpha \fallingdotseq 1 \text{ を用いた})$$

よって $\beta = \boldsymbol{\dfrac{1}{1-\alpha}}$ である．

(2) ①より，数列 $\left\{z_n - \dfrac{1}{1-\alpha}\right\}$ は 初項 $z_1 - \dfrac{1}{1-\alpha} = -\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$，公比 α の等比数列となるので，

$$z_n - \frac{1}{1-\alpha} = \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\alpha^{n-1} \iff z_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

ここで，$z_n = z_m$ が成り立つとき，$\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \dfrac{1-\alpha^m}{1-\alpha}$ であり，これを整理すると，$\alpha^n = \alpha^m$ となる．

よって $\alpha^{n-m} = \alpha^{m-n} = 1$ となるので，$\alpha^{|m-n|} = 1$ が成り立つ． (証明終)

(3) $\alpha = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$ より

$$\alpha^{|m-n|} = \cos 2|m-n|\pi r + i \sin 2|m-n|\pi r \cdots ②$$

と表される．ここで $z_m = z_n$ が成り立つと仮定すると，(2) より $\alpha^{|m-n|} = 1 \cdots ③$ であるので，② と ③ の偏角を比較して

$$2|m-n|\pi r = 2k\pi \qquad (k \text{ は整数})$$

$m \fallingdotseq n$ より，$r = \dfrac{k}{|m-n|}$ となる．右辺は有理数であるため，r が無理数であることに矛盾する．

したがって，すべての相異なる正整数 $m,\ n$ に対し $z_m \fallingdotseq z_n$ である． (証明終)

〔4〕 直円錐に半径 1 の球が内接している。(つまり，球が直円錐の側面と接し，底面とは底面の円の中心で接する。) 直円錐の母線と底面のなす角を $2\theta\left(0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，円錐の側面積を S とする。

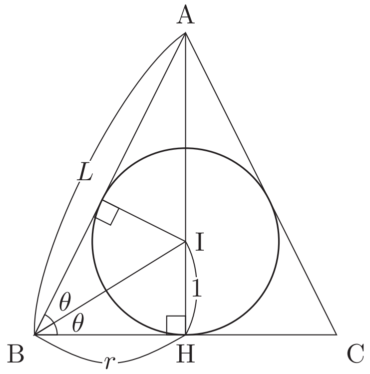
(1) S を θ で表せ。

(2) $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=u$ とする。S を u の関数としてグラフの概形を描き，また S の最小値を求めよ。

解答

(1) 直円錐の底面の半径を r，母線の長さを L とする．直円錐を，底面の円の中心を通り底面に垂直な平面で切ったときの切断面を考える．切断面の二等辺三角形を △ABC (BC を底面の直径とする)，BC の中点を H，△ABC の内接円の中心を I とする．

このとき，$\angle\mathrm{IBH}=\theta$ であるから，



$$r=\mathrm{BH}=\frac{\mathrm{IH}}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

である．これより，

$$L=\frac{r}{\cos 2\theta}=\frac{1}{\tan\theta\cos 2\theta}$$

を得るので，側面積 S は,

$$S=\pi\times r\times L=\boldsymbol{\frac{\pi}{\tan^2\theta\cos 2\theta}}\text{（他にも表現方法がある）}$$

である．

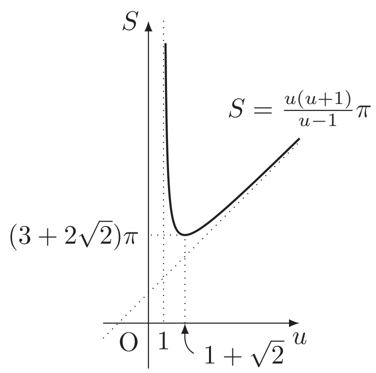
(2) $u=\dfrac{1}{\tan^2\theta}$ である．また，半角の公式より，$u=\dfrac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}$ であるから，$\cos 2\theta=\dfrac{u-1}{u+1}$ である．よって，

$$S=\frac{u(u+1)}{u-1}\pi$$

である．$\dfrac{dS}{du}=\dfrac{u^2-2u-1}{(u-1)^2}\pi$ であり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $u>1$ であるので，この範囲での S の増減は以下の通りとなる．

u	(1)	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$\dfrac{dS}{du}$		$-$	0	$+$
S	∞	↘		↗

よって S のグラフは次のようになる．



よって S の最小値は $\boldsymbol{(3+2\sqrt{2})\pi}$ である．

注釈

$S=\left(u+2+\dfrac{2}{u-1}\right)\pi$ と変形できるので，S のグラフは直線 $S=\pi(u+2)$ を漸近線にもつ．

また $S=\left(u-1+\dfrac{2}{u-1}+3\right)\pi$ と変形すると，相加平均・相乗平均の関係が利用できる．$u-1>0$ なので

$$u-1+\frac{2}{u-1}\geqq 2\sqrt{(u-1)\cdot\frac{2}{u-1}}=2\sqrt{2}$$

が成り立つ．この等号は $u-1=\dfrac{2}{u-1}$ より $u=1+\sqrt{2}$ のとき成り立つので，S の最小値は $(2\sqrt{2}+3)\pi$ であるとわかる．

〔5〕

(1)　$a,\ b$ を互いに素な自然数とするとき，$x,\ y$ の一次方程式 $ax=by$ の整数解をすべて求めよ。(答えのみでよい。)

自然数 $n,\ i,\ j$ は $n-1 \geqq i > j \geqq 1$ を満たすとする。

(2)　次の等式を証明せよ。

$${}_n\mathrm{C}_i \cdot {}_i\mathrm{C}_j = {}_n\mathrm{C}_j \cdot {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j}$$

(3)　${}_n\mathrm{C}_j$ と ${}_n\mathrm{C}_i$ とは互いに素ではないことを，背理法で示せ。

解答

(1)　$(x,\ y)=(kb,\ ka)$ (k は任意の整数)

(2)

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_i \cdot {}_i\mathrm{C}_j &= \frac{n!}{(n-i)!i!} \cdot \frac{i!}{(i-j)!j!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!(i-j)!j!} \\
{}_n\mathrm{C}_j \cdot {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j} &= \frac{n!}{(n-j)!j!} \cdot \frac{(n-j)!}{\{(n-j)-(i-j)\}!(i-j)!} \\
&= \frac{n!}{j!(n-i)!(i-j)!}
\end{aligned}$$

したがって，${}_n\mathrm{C}_i \cdot {}_i\mathrm{C}_j = {}_n\mathrm{C}_j \cdot {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j}$ が成立する．　(証明終)

(3)　(2) より $(x,\ y)=({}_i\mathrm{C}_j,\ {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j})$ は ${}_n\mathrm{C}_i x = {}_n\mathrm{C}_j y$ の整数解の 1 つなので，${}_n\mathrm{C}_j$ と ${}_n\mathrm{C}_i$ が互いに素であると仮定すると (1) より，

$$\begin{cases} k\,{}_n\mathrm{C}_j = {}_i\mathrm{C}_j \\ k\,{}_n\mathrm{C}_i = {}_{n-j}\mathrm{C}_{i-j} \end{cases}$$

を満たす整数 k が存在する．明らかに k は正なので $k \geqq 1$ であるが，

$$\begin{aligned}
k &= \frac{{}_i\mathrm{C}_j}{{}_n\mathrm{C}_j} \\
&= \frac{\dfrac{i!}{(i-j)!j!}}{\dfrac{n!}{(n-j)!j!}} \\
&= \frac{\dfrac{i!}{(i-j)!}}{\dfrac{n!}{(n-j)!}} \\
&= \frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{i-2}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{i-j+1}{n-j+1} \\
&< 1 \quad (\because\ j \geqq 1)
\end{aligned}$$

より矛盾する．

したがって，${}_n\mathrm{C}_j$ と ${}_n\mathrm{C}_i$ とは互いに素ではない．　(証明終)

講評

〔1〕［数学Ⅲの微積分］（易）(1) の不等式の証明は難しくなく，(2) も (1) で示した不等式を利用して積分計算をするだけであり，この問題は落とせない．

〔2〕［確率］（易）箱から札を取り出す試行の確率，および条件付き確率の問題である．(2), (3), (4) の発想がすべて共通しており，条件付き確率の定義をしっかり思い出せるかどうかだけがポイントになる．

〔3〕［数列・複素数］（標準）ごく基本的な漸化式と，複素数の融合問題．各設問の考え方はごく典型的なものばかりだが，完答するには総合的な力が必要．(3) では背理法を使うとよい．

〔4〕［三角関数］（やや難）(1) で S を θ で表せたかどうかで大きく差がつく．(1) が突破できれば (2) は S の増減を微分して調べればよいが，最小値については相加平均・相乗平均の考え方を用いても求められる．

〔5〕［整数］（やや難）(1)(2) は基本問題であり，落とせない．(3) は (1)(2) を用いてどのように矛盾を示すことができるか，差がつきそうな問題である．

2020 年前期と比較すると，難易度は同程度であるがやや作業量が少ない．〔1〕,〔2〕は完答したい．〔3〕～〔5〕の後半のでき具合で差がつくだろう．目標は 70%.