メルリックス 英進館
医学部専門予備校 YMS × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

久留米大学医学部(後期)　数学

2020年 3月 8日実施

1.　$a=3+\sqrt{6}$，$b=3-\sqrt{6}$ のとき，$a+b=$ $\boxed{\text{ア}}$，$ab=$ $\boxed{\text{イ}}$ であるから，$a^3+b^3=$ $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。また，不等式 $|x+a|<b$ の解は $\boxed{\text{カキ}}<x<\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
ア	6
イ	3
ウエオ	162
カキ $<x<$ クケ$\sqrt{\text{コ}}$	$-6<x<-2\sqrt{6}$

解説

$a+b=(3+\sqrt{6})+(3-\sqrt{6})=\mathbf{6}$，$ab=(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=\mathbf{3}$ なので，

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3-3ab(a+b) \\ &= 6^3-3\cdot3\cdot6 \\ &= \mathbf{162} \end{aligned}$$

また，$b=3-\sqrt{6}>0$ なので，

$$\begin{aligned} |x+a|<b &\iff -b<x+a<b \\ &\iff -a-b<x<-a+b \\ &\iff -(a+b)<x<-(3+\sqrt{6})+(3-\sqrt{6}) \\ &\iff \boldsymbol{-6<x<-2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

2. 2567 と 799 の最大公約数を a とすると，$a=$ $\boxed{サシ}$ である。また，不定方程式 $2567x+799y=a$ を満たす整数解 x，y の組のうち，$x+y$ の値が 500 に最も近くなるのは，$x=$ $\boxed{スセソタ}$，$y=$ $\boxed{チツテ}$ である。

解答

解答記号	正解
サシ	17
スセソタ	−249
チツテ	800

解説

ユークリッドの互除法を利用すると，次表が得られる．

$2567x+799y$	x	y	
2567	1	0	
799	0	1	$(\times 3)$
170	1	-3	$(\times 4)$
119	-4	13	
51	5	-16	$(\times 2)$
17	-14	45	$(\times 3)$
0	47	-151	

これより 2567 と 799 の最大公約数が 17 であること，および $2567\times(-14)+799\times 45=17$ であることがわかった．これを 17 で割ると $151\times(-14)+47\times 45=1$ なので，

$$2567x+799y=a=17 \iff 151x+47y=1\cdots①$$

と辺々引くことにより，

$$151(x+14)=47(-y+45)$$

が得られる．151 と 47 は互いに素であるから，k を整数としてこの両辺は $151\times 47\times k$ とおける．これより

$$x=47k-14,\ y=-151k+45 \quad\Longrightarrow\quad x+y=-104k+31$$

を得る．これより，$k=-4$ のとき $x+y=447$，$k=-5$ のとき $x+y=551$ となるので，$k=-5$ のときが最も 500 に近い．したがって，

$$\boldsymbol{x=-249,\ y=800}$$

である．

別解

上の方法では x, y と a の値が同時に求まっているが，$a=17$ だけを先に求めた場合は，①を満たす x, y を見付けるのに合同式を利用してもよい．以下，合同式は 47 を法とするものとする．

$$151x+47y=1 \Longrightarrow 10x\equiv 1\cdots② \Longrightarrow 50x\equiv 5$$

$$\Longrightarrow 3x\equiv 5 \Longrightarrow 9x\equiv 15\cdots③ \Longrightarrow x\equiv -14\ (\because ②-③)$$

したがって $x=47k-14$ とおける．(以下略)

3. 座標平面上において，3 点 A$(-1,\ -1)$，B$(2,\ 0)$，P$(s,\ t)$ を頂点とする △ABP の重心を G とし，点 P は円 $C : x^2+y^2=4$ 上を動くとする。

このとき，重心 G は円 $\left(x-\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)^2+\left(y+\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)^2=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ 上を動く。

ただし，点 P が直線 AB 上にあるとき △ABP は存在しないので，点 P が点 $(2,\ 0)$，$\left(-\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}},\ -\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}\right)$ のときを除く。

また，△ABP の面積が最大となるのは，点 P が $\left(-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ホマ}}}}{\boxed{\text{ミ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ム}}\sqrt{\boxed{\text{メモ}}}}{\boxed{\text{ヤ}}}\right)$ のときであり，その値は $\boxed{\text{ユ}}+\sqrt{\boxed{\text{ヨラ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
$\left(x-\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}\right)^2+\left(y+\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}\right)^2=\dfrac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$	$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$
$\left(-\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒ}},\ -\dfrac{\text{フ}}{\text{ヘ}}\right)$	$\left(-\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)$
$\left(-\dfrac{\sqrt{\text{ホマ}}}{\text{ミ}},\ \dfrac{\text{ム}\sqrt{\text{メモ}}}{\text{ヤ}}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\ \dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$
$\text{ユ}+\sqrt{\text{ヨラ}}$	$1+\sqrt{10}$

解説

点 G の座標を $(X,\ Y)$ とおくと題意より，

$$\begin{cases} X=\dfrac{1+s}{3} \\ Y=\dfrac{-1+t}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} s=3X-1 \\ t=3Y+1 \end{cases}$$

となる．点 P$(s,\ t)$ は円 $C : x^2+y^2=4$ 上にあるので代入すると，

$$(3X-1)^2+(3Y+1)^2=4 \iff \left(X-\frac{1}{3}\right)^2+\left(Y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

となるので，点 G$(X,\ Y)$ は $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}}$ 上を動く．

直線 AB : $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ と円 $C : x^2+y^2=4$ を連立すると，

$$x^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=4 \iff 5x^2-2x-16=0 \iff (5x+8)(x-2)=0$$

となるので，△ABP が存在しなくなるのは，点 P が $(2,\ 0)$，$\boldsymbol{\left(-\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{6}{5}\right)}$ のときである．

△ABP の面積が最大となるのは，AB を底辺と見たときに高さが最も高くなるときであり，それは AB に平行な直線が円と接するときの接点を点 P とするときである（そのような点 P は 2 箇所あるが，直線 AB に関して原点 O

と同じ側にある点である）．このとき，OP と AB は垂直であるので，AB に垂直で点 O を通る直線 $y=-3x$ と円 $C: x^2+y^2=4$ との交点（のうちの第 2 象限のもの）が求める点 P である．

$$x^2+(-3x)^2=4 \iff x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$$

より，$\mathbf{P}\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{5},\ \dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$ である．

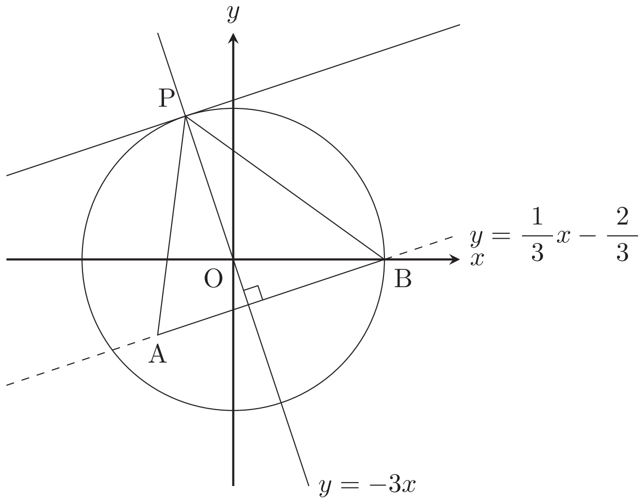
また，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と直線 $\mathrm{AB}: x-3y-2=0$ の距離は，

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

となるので，このときの三角形の高さは $\dfrac{2}{\sqrt{10}}+2$ となる．$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$ なので，三角形の面積の最大値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{10}}+2\right)=\mathbf{1+\sqrt{10}}$$

である．



4.　$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-3}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$b_n=a_1a_2\cdots a_n$ とする。

(1)　$c_n=b_{n+1}-b_n$ とすると，$b_2=\boxed{\text{リル}}$，$c_1=\boxed{\text{レ}}$ である。また，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\boxed{\text{ロ}}$ であるから，$c_n=\boxed{\text{ワ}}^{n+1}$ である。

(2)　$b_n=\dfrac{\boxed{\text{あ}}^{n+1}-\boxed{\text{い}}}{\boxed{\text{う}}}$ である。

(3)　$a_n=\dfrac{\boxed{\text{え}}^{n+1}-\boxed{\text{お}}}{\boxed{\text{か}}^{n}-\boxed{\text{き}}}$ である。

解答

解答記号	正解
リル	13
レ	9
ロ	3
ワ	3
$\dfrac{\text{あ}^{n+1}-\text{い}}{\text{う}}$	$\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$
$\dfrac{\text{え}^{n+1}-\text{お}}{\text{か}^{n}-\text{き}}$	$\dfrac{3^{n+1}-1}{3^{n}-1}$

解説

(1)　まず，すべての n に対して $a_n>1$ であることに注意しておく．これは $a_{n+1}=4-\dfrac{3}{a_n}$ より帰納的にわかる．これより $b_{n+1}>b_n$ すなわち $c_n>0$ もわかる．

$a_2=\dfrac{13}{4}$ より $b_2=a_1a_2=4\cdot\dfrac{13}{4}=\mathbf{13}$，$c_1=b_2-b_1=13-4=\mathbf{9}$．また，

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n}&=\frac{b_{n+2}-b_{n+1}}{b_{n+1}-b_n}\\&=\frac{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}(a_{n+2}-1)}{a_1a_2\cdots a_n(a_{n+1}-1)}\\&=\frac{a_{n+1}(a_{n+2}-1)}{a_{n+1}-1}\\&=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}\left(\frac{4a_{n+1}-3}{a_{n+1}}-1\right)\\&=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}\cdot\frac{3a_{n+1}-3}{a_{n+1}}\\&=\mathbf{3}\end{aligned}$$

であるから，数列 $\{c_n\}$ は公比が 3 の等比数列である．したがって，$c_1=9$ より $c_n=9\cdot3^{n-1}=\mathbf{3^{n+1}}$ となる．

注釈

$c_1=9,\ c_2=b_3-b_2=40-13=27$ より $\dfrac{c_2}{c_1}=3$ となるので，空所補充形式であることから $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=3$ と決めつけてしまってよいだろう．

(2)　(1) より $b_{n+1}-b_n=3^{n+1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1} \\ &= 4 + \frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1} \\ &= 4 + \frac{9}{2}(3^{n-1}-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \end{aligned}$$

である（これは $n=1$ のときも成り立っている）.

(3)　b_n の定義式から，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{b_n}{b_{n-1}} \\ &= \frac{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}{\dfrac{3^n-1}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}} \end{aligned}$$

である（これは $n=1$ のときも成り立っている）.

別解

一般項 a_n は以下のように求めることもできる．$a_{n+1} = \dfrac{4a_n-3}{a_n} \cdots$① の特性方程式 $x = \dfrac{4x-3}{x}$ を解くと $x=1,\ 3$ が求まる．この値を ① の両辺からそれぞれ引くことにより，

$$a_{n+1}-1 = \frac{3(a_n-1)}{a_n},\quad a_{n+1}-3 = \frac{a_n-3}{a_n}$$

が得られる．帰納的に $a_n \fallingdotseq 3$ が分かるので，辺々を割ることにより

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-3} = 3 \cdot \frac{a_n-1}{a_n-3}$$

が得られるので，数列 $\left\{\dfrac{a_n-1}{a_n-3}\right\}$ は公比 3 の等比数列である．$\dfrac{a_1-1}{a_1-3} = 3$ であるから，

$$\frac{a_n-1}{a_n-3} = 3^n \iff \boldsymbol{a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}}$$

5. 座標平面上の原点 O に点 P がある。正八面体の各面に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ書かれているさいころを投げて，目の出方により点 P を次のように動かす。

- 2，4，8 の目が出たときは x 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- 3 の目が出たときは y 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- 6 の目が出たときは x 軸の正の方向に 1，y 軸の正の方向に 1 だけ動かす。
- それ以外の目が出たときは動かさない。

(1) さいころを 3 回投げ終えたとき，点 P が点 (3, 1) にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{くけ}}}{\boxed{\text{こさし}}}$ である。

(2) さいころを 4 回投げ終えたとき，点 P が点 (2, 2) にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{すせ}}}{\boxed{\text{そたちつ}}}$ である。

(3) さいころを 4 回投げ終えたとき，点 P が直線 $x+y=4$ 上にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{てとな}}}{\boxed{\text{にぬねの}}}$ である。

解答

解答記号	正解
くけ / こさし	27 / 512
すせ / そたちつ	81 / 1024
てとな / にぬねの	443 / 2048

解説

サイコロの目に従って x 軸の正の方向に 1 だけ動かす操作を R, y 軸の正の方向に 1 だけ動かす操作を U, x 軸の正の方向に 1, y 軸の正の方向に 1 だけ動かす操作を D, 動かさない操作を X で表すことにする．サイコロを投げたときその操作が R, U, D, X になる確率はそれぞれ $\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{3}{8}$ である．

(1) 3 回投げ終えたとき，点 P が (3, 1) にあるのは，3 回の操作が R, R, D およびその並べ替えになっている場合なので，その確率は

$$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)=\mathbf{\frac{27}{512}}$$

である．

(2) 4 回投げ終えたとき，点 P が (2, 2) にあるのは，4 回の操作が

(i) R, R, U, U およびその並べ替えになっている場合
(ii) D, R, U, X およびその並べ替えになっている場合
(iii) D, D, X, X およびその並べ替えになっている場合

のいずれかである．

(i) の確率は $\dfrac{4!}{2!2!}\left(\dfrac{3}{8}\right)^2\left(\dfrac{1}{8}\right)^2=\dfrac{54}{8^4}$

(ii) の確率は $4!\left(\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{3}{8}\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{216}{8^4}$

(iii) の確率は $\dfrac{4!}{2!2!}\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{8}\right)^2=\dfrac{54}{8^4}$

従って求める確率は $\dfrac{54+216+54}{8^4} = \dfrac{\mathbf{81}}{\mathbf{1024}}$.

(3)　(2) と同じように考える.

(i)　(4, 0) にたどり着くのは R, R, R, R しかないので，確率は $\left(\dfrac{3}{8}\right)^4 = \dfrac{81}{4096}$

(ii)　(3, 1) にたどり着くのは，R, R, R, U の並び替え，D, R, R, X の並び替えなので，確率は

$$4\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{432}{4096}$$

(iii)　(2, 2) にたどり着くのは，(2) より $\dfrac{324}{4096}$

(iii)　(1, 3) にたどり着くのは，R, U, U, U の並び替え，D, U, U, X の並び替えなので，確率は

$$4\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{48}{4096}$$

(iv)　(0, 4) にたどり着くのは U, U, U, U しかないので，確率は $\left(\dfrac{1}{8}\right)^4 = \dfrac{1}{4096}$

以上より求める確率は

$$\frac{81+432+324+48+1}{4096}=\frac{886}{4096}=\frac{\mathbf{443}}{\mathbf{2048}}$$

別解

R および U を 1 歩進む操作，D を 2 歩進む操作，X を 0 歩進む操作とみなす．すると (3) は「4 回の操作で 4 歩進む確率はいくらか」という問題になる.

1 回の操作で 2 歩進む確率は $\dfrac{1}{8}$, 1 歩進む確率は $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{4}{8}$, 0 歩進む確率は $\dfrac{3}{8}$ である．これを $\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{4}{8}x+\dfrac{3}{8}$ で表すと，4 回の操作で 4 歩進む確率は $\left(\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{4}{8}x+\dfrac{3}{8}\right)^4$ の x^4 の係数ということになる.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{4}{8}x+\frac{3}{8}\right)^4\\
&=\frac{1}{4096}\left(x^2+4x+3\right)^4\\
&=\frac{1}{4096}\left(x^8+16x^7+108x^6+400x^5+886x^4+1200x^3+972x^2+432x+81\right)
\end{aligned}$$

であるから求める確率は $\dfrac{886}{4096}=\dfrac{443}{2048}$ である.

もちろん x^4 の係数だけを計算すればよいのであって，全部展開する必要はない．x^4 の係数の計算は多項係数の問題として次のように解くのがよいだろう.

	x^2	$+4x$	$+3$	項
①	2	0	2	$\dfrac{4!}{2!0!2!}(x^2)^2(4x)^0 3^2=54x^4$
②	1	2	1	$\dfrac{4!}{1!2!1!}(x^2)^1(4x)^2 3^1=576x^4$
③	0	4	0	$\dfrac{4!}{0!4!0!}(x^2)^0(4x)^4 3^0=256x^4$
合計				$886x^4$

6. 座標平面上において，曲線 $C : y = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_2^x \dfrac{1}{\sqrt{3s-5}}ds + 1 \ \left(x > \dfrac{5}{3}\right)$ と直線 $\ell : y = x - 1$ を考える。

(1) 曲線 C と直線 ℓ は2点 $(\boxed{\text{は}}, \boxed{\text{ひ}}), (\boxed{\text{ふ}}, \boxed{\text{へ}})$ で交わる。ただし，$\boxed{\text{は}} < \boxed{\text{ふ}}$ とする。

(2) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は，$\dfrac{\boxed{\text{ほ}}}{\boxed{\text{ま}}}\pi$ である。ただし，π は円周率とする。

解答

解答記号	正解
(は, ひ), (ふ, へ)	(2, 1), (3, 2)
$\dfrac{\text{ほ}}{\text{ま}}\pi$	$\dfrac{1}{6}\pi$

解説

(1) 積分を実行すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}(3s-5)^{\frac{1}{2}}\right]_2^x + 1 \\ &= (3x-5)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となるので，ℓ と連立して y を消去すると，

$$\begin{aligned} x - 1 = (3x-5)^{\frac{1}{2}} &\iff x^2 - 2x + 1 = 3x - 5,\ x \geqq 1 \\ &\iff x^2 - 5x + 6 = 0,\ x \geqq 1 \\ &\iff x = 2,\ 3 \end{aligned}$$

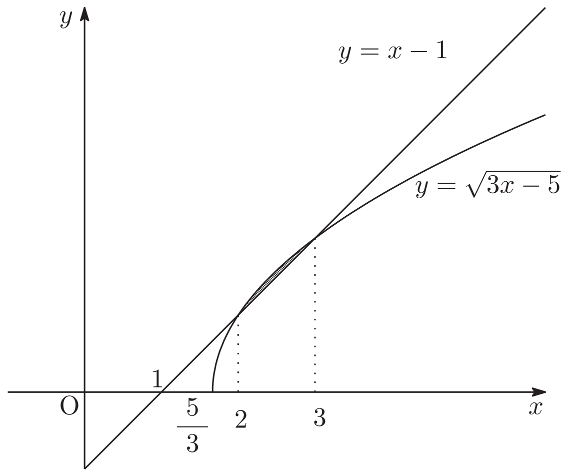
よって，C，ℓ の交点は **(2, 1)**，**(3, 2)** である.

(2) 図より求める体積は

$$\pi\int_2^3 (3x-5)dx - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1\right)$$

$$= \pi\left[\frac{3}{2}x^2 - 5x\right]_2^3 - \frac{8-1}{3}\pi$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}\pi}$$



講評

1.［数と式］（易）対称式の基本問題と絶対値つき不等式の問題．完答したい．

2.［整数］（易）ユークリッドの互除法と 1 次不定方程式の問題．完答したい．

3.［図形と式］（やや易）軌跡の問題と三角形の面積の最大値に関する問題．点 P の座標や三角形の高さを上手に求めたい．

4.［数列］（標準）分数関数型の漸化式．典型的解法があるが，それとは異なる誘導がついており，戸惑った受験生も多かっただろう．自力でまず一般項 a_n を求められた人が有利だったかも知れない．

5.［確率］（やや難）座標平面上の動点に関する問題．一手での動きが少々複雑なので慎重に考える必要がある．特に (3) では，(1) をそのまま使ってしまわないように気をつけたい．

6.［数Ⅲの微積分］（やや易）定積分で表された関数であるが，素直に積分するだけでよい．(2) の回転体の体積もごく基本的で，落とせない．

2020 年前期・推薦同様，マークシート形式だった．2020 年前期と比較するとやや面倒な問題が増えてはいるが，落としたくない問題が多く，高得点勝負であることは変わりないだろう．後期ということもふまえると，目標点は 85%．