医学部専門予備校 YMS heart of medicine　医学部進学予備校 メビオ

解答速報

久留米大学医学部（前期）　数学

2020年 2月 1日実施

1. m を定数とし，次の 2 つの 2 次方程式 $x^2-3x+2m+2=0$ $\cdots$①，$x^2+2x-m-3=0$ $\cdots$② を考える。

(1)　①が異なる 2 つの実数解をもつのは $m<\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときである。

(2)　②の 1 つの解が $x=3$ であるとき，もう 1 つの解は $x=-\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3)　①，②が共通の実数解をもつのは，$m=\boxed{\text{エ}}$，$-\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のときである。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\dfrac{1}{8}$
$-$ウ	-5
エ	0
$-\dfrac{\text{オカ}}{\text{キ}}$	$-\dfrac{35}{9}$

解説

(1)　①の判別式を D とすると，$D=9-4(2m+2)>0$ より $\boldsymbol{m<\dfrac{1}{8}}$.

(2)　$x=3$ を②に代入すると $m=12$ が得られる．したがって

$$②\iff x^2+2x-15=0\iff(x+5)(x-3)=0\iff x=-5,\ 3$$

となるのでもう 1 つの解は $\boldsymbol{x=-5}$.

（もう 1 つの解を文字でおいて解と係数の関係を用いてもよい）

(3)　①，② が共通の実数解 α を持つとすると，

$$\alpha^2-3\alpha+2m+2=0\cdots①',\quad \alpha^2+2\alpha-m-3=0\cdots②'$$

となる．①$'$ $+$ ②$'$ $\times 2$ より，

$$3\alpha^2+\alpha-4=0\iff(\alpha-1)(3\alpha+4)=0\iff\alpha=1,\ -\frac{4}{3}\cdots③$$

である．②$'$ から $m=\alpha^2+2\alpha-3$ なので，

$$\alpha=1 \text{ のとき } \boldsymbol{m=0},\ \ \alpha=-\frac{4}{3} \text{ のとき } \boldsymbol{m=-\frac{35}{9}}$$

(注)「α，m が ①$'$ かつ ②$'$ を満たす」と「α，m が ②$'$ かつ ③ を満たす」は同値なので，上の答は ①$'$ も満たす．

2. 1000 から 2020 までの整数について考える。

(1) 3 で割り切れる整数は全部で $\boxed{クケコ}$ 個ある。

(2) 1110 のように各位の数字がちょうど 3 つだけ同じになる整数は全部で $\boxed{サシ}$ 個ある。

(3) 千の位，百の位，十の位，一の位の数をそれぞれ a, b, c, d とするとき，$a+c=b+d$ となる 1000 から 2020 までの整数は全部で $\boxed{スセ}$ 個ある。

解答

解答記号	正解
クケコ	340
サシ	37
スセ	65

解説

(1) 1 から 2020 までの 3 の倍数の個数から 1 から 999 までの 3 の倍数の個数を引けばよいので,

$\left[\dfrac{2020}{3}\right]-\left[\dfrac{999}{3}\right]=673-333=\mathbf{340}$ 個.

(2) 題意を満たす整数は以下のようになる.

タイプ	場合の数	備考
1000	1	
$111d$	9	d は 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 通り
$11c1$	9	c は 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 通り
$1b11$	9	b は 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 通り
$1bcd$	8	bcd は 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999 の 8 通り
2000	1	
計	37	

以上により，**37** 個.

(3) 題意を満たす整数は以下のようになる.

タイプ	場合の数	備考
$1b0d$	2	$(b,\ d)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$
$1b1d$	3	$(b,\ d)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$
$1b2d$	4	$(b,\ d)=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$
$1b3d$	5	$(b,\ d)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ \cdots,\ (4,\ 0)$
$1b4d$	6	$(b,\ d)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ \cdots,\ (5,\ 0)$
$1b5d$	7	$(b,\ d)=(0,\ 6),\ (1,\ 5),\ \cdots,\ (6,\ 0)$
$1b6d$	8	$(b,\ d)=(0,\ 7),\ (1,\ 6),\ \cdots,\ (7,\ 0)$
$1b7d$	9	$(b,\ d)=(0,\ 8),\ (1,\ 7),\ \cdots,\ (8,\ 0)$
$1b8d$	10	$(b,\ d)=(0,\ 9),\ (1,\ 8),\ \cdots,\ (9,\ 0)$
$1b9d$	9	$(b,\ d)=(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ \cdots,\ (9,\ 1)$
2002	1	
2013	1	
計	65	

以上により，**65** 個.

$\boxed{\text{別解}}$

$a=1$ の場合は次のように考えてもよい．このときは $1 \leqq b+d \leqq 10$ となればよい．

「$1 \leqq b+d \leqq 10$ を満たす整数 $(b,\ d)$（ただし，$0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq d \leqq 9$）の組の個数」

と

「$b+d+e=10$ を満たす整数 $(b,\ d,\ e)$（ただし，$0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq d \leqq 9,\ 0 \leqq e \leqq 9$）の組の個数」

は一致する．これは，

「$b+d+e=10$ を満たす 0 以上の整数 $(b,\ d,\ e)$ の組の個数」から

「$(b,\ d,\ e)=(10,\ 0,\ 0),\ (0,\ 10,\ 0),\ (0,\ 0,\ 10)$」の 3 組を除いたもの

であるから，その個数は ${}_{12}\mathrm{C}_2-3=63$ 個，と考えることもできる．

3. 点 $(x,\ y)$ が連立方程式 $\begin{cases} y \geqq x \\ y \geqq -2x \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+2 \end{cases}$ の表す領域を動くとする。

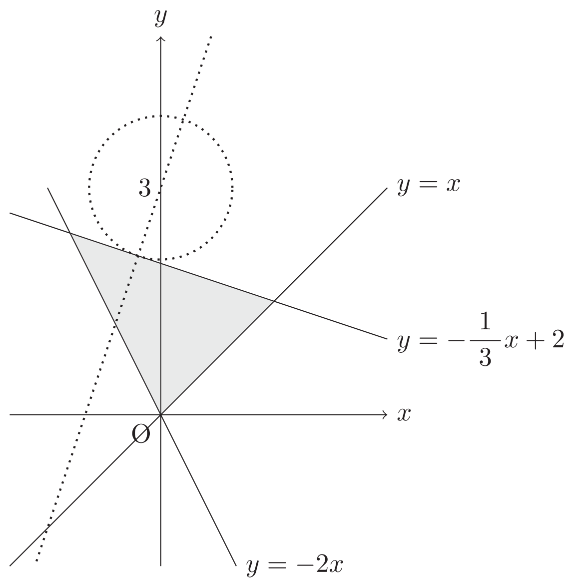
(1) 点 $(0,\ 3)$ から直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ までの距離は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) x^2+y^2-6y は $x=-\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ のとき，最小値 $-\dfrac{\boxed{\text{ヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ をとる。

解答

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ソ}\sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツテ}}$	$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
$-\dfrac{\text{ト}}{\text{ナニ}}$	$-\dfrac{3}{10}$
$\dfrac{\text{ヌネ}}{\text{ノハ}}$	$\dfrac{21}{10}$
$-\dfrac{\text{ヒフ}}{\text{ヘホ}}$	$-\dfrac{81}{10}$

解説



(1) $y=-\dfrac{1}{3}x+2 \iff x+3y-6=0$ なので，点と直線の距離の公式より距離 d は

$$d=\frac{|0+3\times 3-6|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

(2) $x^2+y^2-6y=k$ と置く．これは $x^2+(y-3)^2=k+9$ と変形されるので，中心が $(0,\ 3)$，半径が $\sqrt{k+9}$ の円を表す，この円が $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ に接する場合，接点は $y=-\dfrac{1}{3}x+2$ と $y=3x+3$ の交点になっている．連立方程式を解くと $(x,\ y)=\left(\mathbf{-\dfrac{3}{10}},\ \mathbf{\dfrac{21}{10}}\right)$ となり，これは考えている領域に含まれることがわかるので，最

小値を実現するのはこの点である．また最小値は (1) より $\sqrt{k+9}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ を解いて $k=-\boldsymbol{\dfrac{81}{10}}$ とわかる．

4. $a_1 = 1,\ a_2 = 16,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} + 14a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $a_3 = \boxed{\text{マミ}}$ であり，$a_n = \boxed{\text{ム}} \cdot \boxed{\text{メ}}^{n-1} - (-\boxed{\text{モ}})^{n-1}$ である。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\boxed{\text{メ}}^{n} + (-\boxed{\text{モ}})^{n} - \boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

解答

解答記号	正解
マミ	94
ム・メ$^{n-1}$ − (−モ)$^{n-1}$	$2 \cdot 7^{n-1} - (-2)^{n-1}$
$\dfrac{\text{メ}^{n} + (-\text{モ})^{n} - \text{ヤ}}{\text{ユ}}$	$\dfrac{7^n + (-2)^n - 2}{3}$

解説

(1) $a_3 = 5a_2 + 14a_1 = 5 \cdot 16 + 14 = \mathbf{94}.$

また，与漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 7a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 7a_n) \cdots ① \\ a_{n+2} + 2a_{n+1} = 7(a_{n+1} + 2a_n) \cdots ② \end{cases}$$

と変形でき，

$$\begin{cases} ①\text{より，}a_{n+1} - 7a_n = (a_2 - 7a_1) \cdot (-2)^{n-1} = 9(-2)^{n-1} \cdots ①' \\ ②\text{より，}a_{n+1} + 2a_n = (a_2 + 2a_1) \cdot 7^{n-1} = 18 \cdot 7^{n-1} \cdots ②' \end{cases}$$

となる．②$'$ − ①$'$ より，$9a_n = 18 \cdot 7^{n-1} - 9(-2)^{n-1}$ となるので，

$$a_n = \mathbf{2 \cdot 7^{n-1} - (-2)^{n-1}}$$

(2) 等比数列の和であることを利用して，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \frac{2(7^n - 1)}{7 - 1} - \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} \\ &= \frac{(7^n - 1) - \{1 - (-2)^n\}}{3} \\ &= \mathbf{\frac{7^n + (-2)^n - 2}{3}} \end{aligned}$$

5. 1辺の長さが 6 の正四面体 OABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D とする。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \boxed{ヨラ}$ である。また，$\overrightarrow{CD} = \dfrac{\boxed{リ}\overrightarrow{OA} + \boxed{ル}\overrightarrow{OB} - \boxed{レ}\overrightarrow{OC}}{\boxed{ロ}}$ である。

(2) 辺 BC を $s : (1-s)$ (ただし，$0 < s < 1$) に内分する点を E とする。このとき，CD ⊥ OE となるのは，

$s = \dfrac{\boxed{ワ}}{\boxed{あ}}$ のときであり，△ADE の面積は $\dfrac{\boxed{いう}\sqrt{\boxed{え}}}{\boxed{おか}}$ である。

解答

解答記号	正解
ヨラ	18
$\dfrac{リ\overrightarrow{OA}+ル\overrightarrow{OB}-レ\overrightarrow{OC}}{ロ}$	$\dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OC}}{5}$
$\dfrac{ワ}{あ}$	$\dfrac{3}{8}$
$\dfrac{いう\sqrt{え}}{おか}$	$\dfrac{81\sqrt{3}}{40}$

解説

(1) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 6, \angle AOB = 60^\circ$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 6\cdot 6\cdot\cos 60^\circ = \mathbf{18}$.

また，$\overrightarrow{OD} = \dfrac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{5}$ より，$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \dfrac{\mathbf{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OC}}}{\mathbf{5}}$ である.

(2) $\overrightarrow{OE} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC}$ であり，CD ⊥ OE なので

$$\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-5\overrightarrow{OC}}{5}\cdot\{(1-s)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}\} = 0$$

$$\iff 2(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 2s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 3(1-s)|\overrightarrow{OB}|^2 + 3s\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

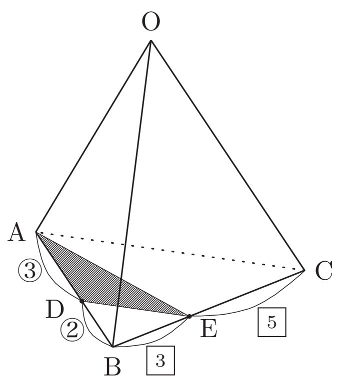
$$-5(1-s)\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} - 5s|\overrightarrow{OC}|^2 = 0$$

$$\iff 8s - 3 = 0$$

したがって，$s = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$ となる.

このとき，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$ なので，

$$\triangle ADE = \triangle ABC\cdot\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BE}{BC} = 9\sqrt{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{\mathbf{81\sqrt{3}}}{\mathbf{40}}$$



6. 関数 $f(x) = x^2 \log x$ を考える。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) $f'(x) = x(\boxed{\text{き}} \log x + \boxed{\text{く}})$ であり，$f(x)$ の極小値は $-\dfrac{\boxed{\text{け}}}{\boxed{\text{こ}}\,e}$ である。

(2) 方程式 $|f(x)| = k$ について，実数解の個数が1個となるのは，$k = \boxed{\text{さ}}$，$k > \dfrac{\boxed{\text{し}}}{\boxed{\text{す}}\,e}$ のときである。

解答

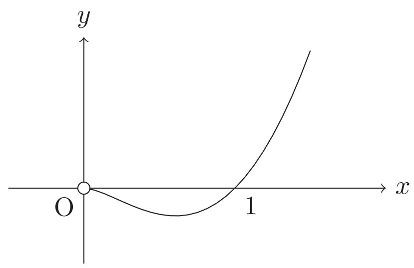
解答記号	正解
き $\log x +$ く	$2\log x + 1$
$-\dfrac{\text{け}}{\text{こ}\,e}$	$-\dfrac{1}{2e}$
$k=$ さ，$k > \dfrac{\text{し}}{\text{す}\,e}$	$k=0$，$k > \dfrac{1}{2e}$

解説

(1) $f(x) = x^2 \log x$ より $f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = \boldsymbol{x(2\log x + 1)}$ である．$f'(x) = 0$ となるのは $\log x = -\dfrac{1}{2}$ つまり $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ のときであり，増減表は

x	(0)		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\nearrow$	∞

これよりグラフは次のようになる．



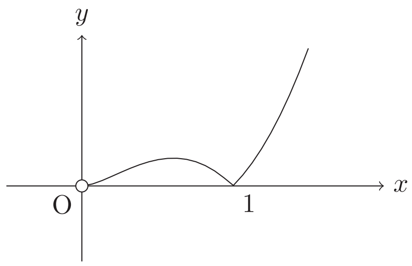
極小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e}\log\frac{1}{\sqrt{e}} = \boldsymbol{-\frac{1}{2e}}$$

注釈

$x = e^{-t}$ と置き換えることにより $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^2\log x = \lim_{t\to\infty} e^{-2t}(-t)$ であるが，$t>0$ のとき $0 < t < e^t$ であるから $0 < \dfrac{t}{e^{2t}} < \dfrac{1}{e^t}$ が成り立つ．よってはさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^2\log x = 0$ がわかる．

(2) $y = |f(x)|$ のグラフは次のとおりである．



この極大値は $\dfrac{1}{2e}$ であるから $|f(x)| = k$ の実数解の個数が 1 個となるのは $\boldsymbol{k = 0,\ k > \dfrac{1}{2e}}$ のときである.

講評

1.［2 次方程式］（やや易）文字定数を含む 2 つの 2 次方程式についての問題．いずれも基本的である．

2.［場合の数］（やや難）(1) は基本的だが，(2)(3) は丁寧に数え上げることができるかが問われる．差がつくだろう．

3.［図形と式］（易）不等式で表された三角形の領域における 2 次式の最小値を求める，典型的な問題である．円が領域に接する条件を求める際に点と直線の距離を利用することになる．

4.［数列］（易）(1) は 3 項間漸化式の問題．(2) は等比数列の和の公式を利用すればよい．いずれも基本的である．

5.［ベクトル］（易）空間ベクトルの内積と三角形の面積に関する問題．(2) の内積計算は効率よく計算しなければならない．また，面積を求めるときには線分の比を利用するとよい．いずれも典型的な問題で落とせない．

6.［数学Ⅲの微積分］（やや易）対数関数を普通に微分して増減表，グラフを考えるだけである．$\lim_{x \to +0} x^2 \log x$ の値を書いてくれていないのがやや不親切だが，見当はつくだろう．

昨年度までは空所補充形式だったのが，マークシート形式となったのは大きな変化である．2020 年度推薦入試でもマークシート形式が導入されていたので想定内ではあった．難易度は，昨年度に引き続いて易〜やや易のものが大半である．第 2 問の数え上げが煩雑だが，それ以外については作業量も多くはない．目標は 80%．