医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

近畿大学医学部（推薦） 数学

2019年11月17日実施

1 空欄に入る数を求めよ。

(1) 循環小数 $0.2020\cdots = 0.\dot{2}\dot{0}$ を既約分数で表すと $\boxed{\text{ア}}$ となる。

(2) n を自然数とする。$3 \leqq p \leqq 9$ を満たす自然数 p に対し，p 進法で表された小数 $M_n = 0.\overbrace{2020\cdots20}^{2n\text{ 個}}{}_{(p)}$ について考える。必要なら $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いよ。

(i) $p = 4$ のとき，M_2 を 10 進法で表すと $\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) $p = 5$ のとき，M_3 を 10 進法で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) M_n および M_{n+1} を 10 進法で表したとき，その差 $M_{n+1} - M_n$ が 10^{-9} より小さくなる最小の n は $\boxed{\text{エ}}$ であり，そのときの p の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

解答

ア $\dfrac{20}{99}$　イ $\dfrac{17}{32}$ $(= 0.53125)$　ウ $\dfrac{1302}{3125}$ $(= 0.41664)$　エ 5　オ 8

解説

(1) $x = 0.\dot{2}\dot{0}$ とおくと $100x = 20.\dot{2}\dot{0}$ であり，辺々引いて $99x = 20$ を得る．従って $x = \mathbf{\dfrac{20}{99}}$.

(2) 以下では指定のない数値は 10 進数であるとする．

(i) $M_2 = 0.2020_{(4)} = \dfrac{202_{(4)}}{1000_{(4)}} = \dfrac{34}{64} = \mathbf{\dfrac{17}{32}}(= \mathbf{0.53125})$.

(ii) $M_3 = 0.202020_{(5)} = \dfrac{20202_{(5)}}{100000_{(5)}} = \dfrac{2 \times 5^4 + 2 \times 5^2 + 2}{5^5} = \mathbf{\dfrac{1302}{3125}}(= \mathbf{0.41664})$.

(iii) n，p に関して

$$
\begin{aligned}
& M_{n+1} - M_n < 10^{-9} \\
\iff\ & 2 \times p^{-(2n+1)} < 10^{-9} \\
\iff\ & 2 \times 10^9 < p^{2n+1} \\
\iff\ & 9 + \log_{10} 2 < (2n+1) \log_{10} p \\
\iff\ & 2n + 1 > \frac{9 + \log_{10} 2}{\log_{10} p} \\
\iff\ & n > \frac{1}{2}\left(\frac{9 + \log_{10} 2}{\log_{10} p} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

p が最大のとき右辺が最小になる．この式に $p=9$ を代入して計算すると

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{9+\log_{10}2}{\log_{10}9}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+0.3010}{0.4771\times 2}-1\right) = 4.3...$$

従って n の最小値は $\mathbf{5}$ である．

逆に $n=5$ の場合，

$$\begin{aligned} & M_6 - M_5 < 10^{-9} \\ \Longleftrightarrow\ & 2\times 10^9 < p^{11} \\ \Longleftrightarrow\ & \log_{10}p > \frac{9+\log_{10}2}{11} = \frac{9.3010}{11} = 0.8455... \end{aligned}$$

$\log_{10}7 = 0.8451$, $\log_{10}8 = 0.9030$ より p の最小値は $\mathbf{8}$ である．

2 自然数 n について，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が以下を満たすとする。

$$a_1 = 0,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 8b_n + 8,\ b_{n+1} = a_n + 7b_n - 5$$

(1) $a_{n+1} - p = (a_n - p) - 8(b_n - q),\ b_{n+1} - q = (a_n - p) + 7(b_n - q)$ を満たす実数 p および q を求めよ。

(2) (1) のとき，さらに $A_n = a_n - p,\ B_n = b_n - q$ とおく。このとき，$A_{n+1} + rB_{n+1} = s(A_n + rB_n)$ を満たす実数 r と s の組をすべて求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

(1) $p = -1,\ q = 1$

(2) $(r,\ s) = (2,\ 3),\ (4,\ 5)$

(3) $a_n = 2 \cdot 3^n - 5^n - 1,\ b_n = \dfrac{5^n - 3^n}{2} + 1$

解説

(1)

$$\begin{aligned} &a_{n+1} - p = (a_n - p) - 8(b_n - q),\ b_{n+1} - q = (a_n - p) + 7(b_n - q) \\ \Longleftrightarrow\ &a_{n+1} = a_n - 8b_n + 8q,\ b_{n+1} = a_n + 7b_n - p - 6q \end{aligned}$$

これと与漸化式を係数比較して，

$$8q = 8,\ -p - 6q = -5$$

が得られる．これを連立して解いて，$\boldsymbol{(p,\ q) = (-1,\ 1)}$.

(2) (1) より，

$$A_1 = 1,\ B_1 = 1,\ A_{n+1} = A_n - 8B_n,\ B_{n+1} = A_n + 7B_n$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} A_{n+1} + rB_{n+1} &= (A_n - 8B_n) + r(A_n + 7B_n) \\ &= (1 + r)A_n + (-8 + 7r)B_n \end{aligned}$$

となるが，$1 : r = (1 + r) : (-8 + 7r)$ の解は，$r = 2,\ 4$ であり，

$$A_{n+1} + 2B_{n+1} = 3A_n + 6B_n = 3(A_n + 2B_n)$$

$$A_{n+1} + 4B_{n+1} = 5A_n + 20B_n = 5(A_n + 4B_n)$$

であるので，$\boldsymbol{(r,\ s) = (2,\ 3),\ (4,\ 5)}$ である．

(3) (2) より，

$$\begin{cases} A_n + 2B_n = 3^{n-1}(A_1 + 2B_1) = 3^n \\ A_n + 4B_n = 5^{n-1}(A_1 + 4B_1) = 5^n \end{cases}$$

となる．これを連立して解くと，$A_n = 2 \cdot 3^n - 5^n,\ B_n = \dfrac{5^n - 3^n}{2}$ となるので，

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^n - 5^n - 1,\ b_n = \dfrac{5^n - 3^n}{2} + 1}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC において，$\angle$B の二等分線と辺 AC との交点を D，$\angle$C の二等分線と辺 AB との交点を E とする。また，BC $= a$，AE : EB $= t : 1$，AD : DC $= 3 : 2$ とする。ただし，$a > 0$，$t > 0$ とする。

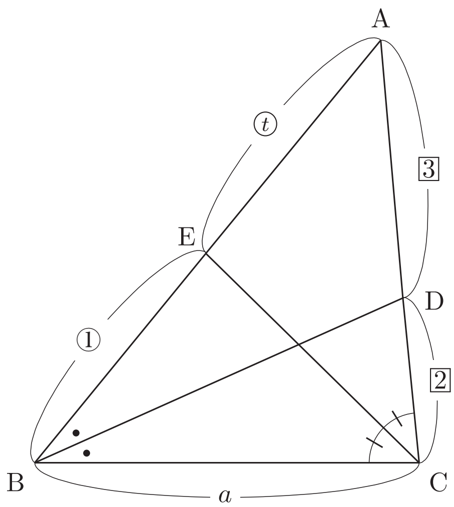
(1) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$ を求めよ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) BD を a, t を用いて表せ。

(4) $\triangle$ABC の面積の最大値を a を用いて表せ。また，そのときの t の値を求めよ。

解答



(1) 三角形における角の二等分線の性質から，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

である．

(2) (1) と同様にして $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}} = t$ が分かるので，

AB $= \dfrac{3}{2}a$, CA $= at$ である．AB $>$ BC であることに注意すると，三角形の成立条件から，

$$\frac{3}{2}a + a > at \quad \text{かつ} \quad a + at > \frac{3}{2}a$$

$$\iff \boldsymbol{\frac{1}{2} < t < \frac{5}{2}}$$

(3) $\triangle$ABC および $\triangle$DBC に余弦定理を用いて

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = \frac{a^2 + a^2t^2 - \dfrac{9}{4}a^2}{2\cdot a\cdot at} = \frac{a^2 + \dfrac{4}{25}a^2t^2 - \mathrm{BD}^2}{2\cdot a\cdot\dfrac{2}{5}at}$$

であるから，これを BD^2 について解いて，

$$\mathrm{BD}^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{6}{25}a^2t^2 \iff \boldsymbol{\mathrm{BD} = a\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{6}{25}t^2}}$$

を得る．

別解

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{q}$ とする．$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}|^2 = |\overrightarrow{q}|^2 - 2\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{p} + |\overrightarrow{p}|^2$ に各辺長を代入して，

$$a^2t^2 = a^2 - 2\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{p} + \frac{9}{4}a^2 \iff \overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{p} = \frac{a^2}{8}(13 - 4t^2)$$

を得る．従って，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2 = \left|\frac{2\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}}{5}\right|^2$$
$$= \frac{1}{25}\left(4|\overrightarrow{p}|^2 + 12\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q} + 9|\overrightarrow{q}|^2\right)$$
$$= \frac{1}{25}\left\{4\cdot\frac{9}{4}a^2 + 12\cdot\frac{a^2}{8}(13-4t^2) + 9a^2\right\}$$
$$= \frac{3}{2}a^2 - \frac{6}{25}a^2t^2$$

となるので，$\boldsymbol{\mathrm{BD} = a\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{6}{25}t^2}}$ である．

(4)　$\mathrm{AB} = \frac{3}{2}a$, $\mathrm{BC} = a$ はいずれも定数であるから，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは $\angle\mathrm{ABC}$ が直角となるときである．従って面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{3}{2}a = \boldsymbol{\frac{3}{4}a^2}$$

である．また，このとき三平方の定理から

$$\mathrm{AC} = \sqrt{a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

となるので，$\boldsymbol{t = \frac{\sqrt{13}}{2}}$ である．（これは $\frac{1}{2} < t < \frac{5}{2}$ を満たす）

別解

ヘロンの公式などを用いることにより実際に $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を a, t で表すと，

$$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{-t^4 + \frac{13}{2}t^2 - \frac{25}{16}}$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{-\left(t^2 - \frac{13}{4}\right)^2 + 9}$$

となり，上と同じ結果が得られる．

講評

$\boxed{1}$［n 進法，循環小数］（標準）(1) は基本的．(2) の (i)(ii) も注意深く計算するだけである．(iii) は「$M_{n+1}-M_n$ が 10^{-9} より小さくなるすべての $(n,\ p)$ の中で n の最小値を求め，その n を実現する p の最小値を求めよ.」と解釈して解いた．

$\boxed{2}$［数列］（やや易）定数項つきの連立漸化式はやや珍しいが，ていねいに誘導に乗れば難しくない．ここは確実に正答したい．

$\boxed{3}$［図形と計量］（標準）三角形における角の二等分線の性質を利用する問題．解き慣れているかどうかで差がつく出題といえる．

昨年度に比べて易化した．$\boxed{1}$ (1),(2) の (i)(ii) は完答したい．(2)(iii) は問題の解釈も難しく，計算量も多いので後回しにするべきだろう．$\boxed{2}$は完答に近いくらいまで仕上げたい．$\boxed{3}$でどれだけしっかり議論できたかが勝敗を分ける．目標は 70%.