解答速報

近畿大学医学部（後期）　数学

2020年 3月 1日実施

1　次の文の $\boxed{}$ にあてはまる適当なものを答えよ．

(1)　$13x+31y=1$ を満たす整数 x，y は k を整数として，$x=\boxed{\text{ア}}-31k$，$y=\boxed{\text{イ}}+13k$ と表せる．

次に，$13x+31y=1000$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて挙げると $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2)　自然数からなる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．数列 $\{a_n\}$ は等差数列であり，数列 $\{b_n\}$ は等式 $b_{n+1}=a_nb_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる．数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=29$，$S_5=2141$ であった．このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boxed{\text{エ}}$ であり，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $\boxed{\text{オ}}$ である．また，$n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_kb_{n-k}}=\boxed{\text{カ}}$ となる．

解答

(1)　ア -19　イ 8　（ア 12　イ -5　などでもよい．）　ウ $(3,\ 31)$，$(34,\ 18)$，$(65,\ 5)$

(2)　エ $2n+2$　オ $2^{n-1}\cdot n!$　カ $\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-3}\cdot n!}$

解説

(1)　以下合同式の法は 13 とする．$13x+31y=1$ より $31y\equiv 1$ つまり $5y\equiv 1$ となる．両辺を 8 倍して $40y\equiv 8$ つまり $y\equiv 8$ を得る．これより k を整数として $y=\mathbf{8}+13k$ と表される．これを $13x+31y=1$ に代入して $x=\mathbf{-19}-31k$ もわかる．

（注意）　$y\equiv 8$ から $y=\mathbf{-5}+13k$ などという異なる表記を作ることもできる．この場合は $x=\mathbf{12}-31k$ となるが，答としてはどれでもよい．

別解

ユークリッドの互除法を使って次のように解くこともできる．

x	y	$13x+31y$
0	1	31
1	0	13
-2	1	5
5	-2	3
-7	3	2
12	-5	1

（別解終わり）

同様に考えて，$13x+31y=1000$ より $31y\equiv 1000$ つまり $5y\equiv -1$ となる．両辺を 8 倍して $40y\equiv -8$ つまり $y\equiv 5$ を得る．これより k を整数として $y=5+13k$ と表される．これを $13x+31y=1000$ に代入して $x=65-31k$ もわかる．

$x,\ y$ は自然数だから $-\dfrac{5}{13}<k<\dfrac{65}{31}$ つまり $k=0,\ 1,\ 2$ でなければならない．これらを代入する．答は $(x,\ y)=\boldsymbol{(3,\ 31),\ (34,\ 18),\ (65,\ 5)}$ の 3 つ．

$\boxed{\text{別解}}$

もちろん $13x+31y=1$ の特殊解 $(x,\ y)=(-19,\ 8)$ を 1000 倍して $13x+31y=1000$ の特殊解 $(x,\ y)=(-19000,\ 8000)$ を採用してもよい．

(2) 与えられた漸化式より $b_2=a_1b_1,\ b_3=a_2b_2=a_2a_1b_1$ がわかる．これより

$$S_3=b_1+b_2+b_3=b_1+a_1b_1+a_1a_2b_1=b_1(1+a_1+a_1a_2)=29$$

$a_n,\ b_n$ は自然数であるから b_1 は 29 の正の約数である．つまり $b_1=1,\ 29$ であるが， $b_1=29$ だと $1+a_1+a_1a_2=1$ となり不適である．従って $b_1=1,\ 1+a_1+a_1a_2=29$.

$1+a_1+a_1a_2=29$ より $a_1(a_2+1)=28$ がわかる．この自然数解は

$$(a_1,\ a_2)=(1,\ 27),\ (2,\ 13),\ (4,\ 6),\ (7,\ 3),\ (14,\ 1)$$

である．

一方

$$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=b_1(1+a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+a_1a_2a_3a_4)=2141$$

であるが，$b_1=1,\ 1+a_1+a_1a_2=29$ を代入すると $a_1a_2a_3(1+a_4)=2141-29=2112=2^6\times 3\times 11$ がわかる．先程の $(a_1,\ a_2)$ のうち a_1a_2 が 2112 の約数になっているのは $(a_1,\ a_2)=(4,\ 6)$ だけしかない．

a_n は等差数列であったから，これより $a_n=\boldsymbol{2n+2}$ である．

（この場合 $a_3=8,\ a_4=10$ より $S_5=2141$ となり矛盾しない．）

これより

$$\begin{aligned}b_n&=b_1\cdot a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}=1\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)\\&=2^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n=\boldsymbol{2^{n-1}\cdot n!}\end{aligned}$$

これを使って

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_kb_{n-k}}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}\cdot k!\cdot 2^{n-k-1}\cdot(n-k)!}\\&=\frac{1}{2^{n-2}\cdot n!}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\\&=\frac{1}{2^{n-2}\cdot n!}\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k\end{aligned}$$

二項定理より $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ であるから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k=2^n-2$ であることがわかる．以上より

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_kb_{n-k}}=\frac{2^n-2}{2^{n-2}\cdot n!}=\boldsymbol{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-3}\cdot n!}}$$

がわかった．

2 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円に正三角形 ABC が内接している．点 P を B を含まない方の弧 AC 上にとり，$\angle \mathrm{CAP} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) PB を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ の値を求めよ．

(3) $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} + \mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC} + \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}$ の最大値を求めよ．

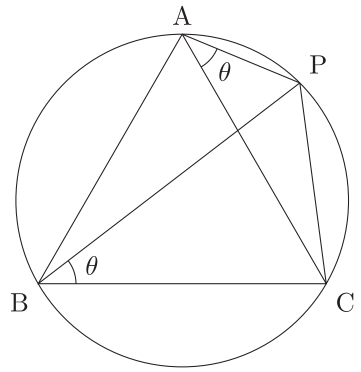
(4) $\triangle$APC の面積を S_1 ，$\triangle$BPC の面積を S_2 とおくとき，$S_1 + S_2$ の最大値を求めよ．

(5) 四角形 ABCP に円が内接するとき，その内接する円の半径を求めよ．

解答

(1) $\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) $\dfrac{5}{4}$　(4) $\dfrac{3}{8}$　(5) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

解説



(1) 正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)} = 1$．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PB} &= \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)} = 1$，$\dfrac{\mathrm{PC}}{\sin\theta} = 1$ が成り立つので，

$$\mathrm{PA} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta = -\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \quad \mathrm{PC} = \sin\theta$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 &= \left(-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2 + (\sin\theta)^2\\ &= \frac{3}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

(3)　(1)(2) の計算結果を利用すると，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}+\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}+\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\\
&=-\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta\\
&=-\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\\
&=-\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\\
&=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\\
&=\frac{1}{4}+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

より，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\mathbf{\dfrac{5}{4}}$ である．

$\boxed{\text{別解}}$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}+\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}+\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\\
&=\frac{1}{2}\left\{(\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC})^2-(\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2-\frac{3}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{4\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

より，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{3}{2}\right)=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$ である．

(4)　三角形の 1 辺の長さは，正弦定理 $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\frac{\pi}{3}}=1$ より $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

$$
\begin{aligned}
S_1+S_2&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{PA}\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{PB}\cdot\sin\theta\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\sin\theta\\
&=\frac{3}{4}\sin\theta\cos\theta\\
&=\frac{3}{8}\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

より $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\mathbf{\dfrac{3}{8}}$ である．

(5)　円が四角形 ABCP に内接するので，$\mathrm{AB}+\mathrm{PC}=\mathrm{BC}+\mathrm{PA}$ が成り立つ．よって，

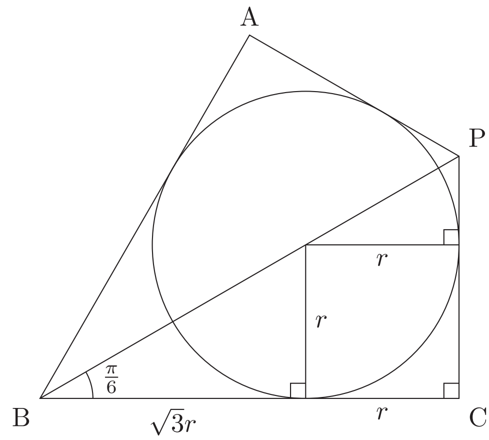
$$
\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \iff \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}
$$

となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ である．

このとき，$\angle \mathrm{PBC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\angle \mathrm{BPC} = \dfrac{\pi}{3}$，$\angle \mathrm{PCB} = \dfrac{\pi}{2}$ となり，右の図のようになる．

求める内接円の半径を r と置くと，

$\mathrm{BC} = \sqrt{3}r + r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\boldsymbol{r = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}}$ である．



後期対策授業（2 月下旬）

座標平面に，原点を中心とし半径が 1 の円があり，その円周上に 3 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

をとる．円周上の弧 BC (点 A を含まないほうの弧 BC) を考え，弧 BC 上を点 B から点 C まで動く点を P とする．

$\angle \mathrm{PAB} = \theta$ とし，点 P と 3 点 A，B，C を結ぶ 3 つの線分の長さを，それぞれ，PA，PB，PC とするとき

(1) PA，PB，PC の長さを θ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

(3) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ の値を求めよ．

3

(1)　2つの2次関数 $f(x)$, $g(x)$ が異なる3つの実数 a, b, c に対して，
$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(c)=g(c)$ を満たすとき，$f(x)=g(x)$ であることを示せ．

(2)　2つの2次関数 $f(x)$, $g(x)$ が -2 でない実数 a に対して，
$f(a)=g(a)$, $f(a+1)=g(a+1)$, $f(a+2)=a+3$, $g(a+2)=-a-1$ を満たす．
このとき，$F(p,\ q)=p\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)dx+q\int_{-3}^{3}g(x)dx$ とおく．

(i)　$F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)-F\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(ii)　$p+q=1$, $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ における $F(p,\ q)$ の最大値を A，最小値を B とするとき，$A-B$ を求めよ．

解答

(1)　$f(x)$, $g(x)$ はいずれも2次式なので，$f(x)-g(x)$ は2次以下の整式である．与条件から，方程式 $f(x)-g(x)=0$ が $x=a$, b, c を解にもつことが分かる．このうち $x=a$, b が解であることを用いると，

$$f(x)-g(x)=m(x-a)(x-b)$$

とおけるが，$x=c$ も解であることから

$$m(c-a)(c-b)=0$$

が成り立つ．与条件から $c-a\fallingdotseq 0$, $c-b\fallingdotseq 0$ であるから $m=0$ となり，恒等的に

$$f(x)-g(x)=0\quad\text{すなわち}\quad f(x)=g(x)$$

が成り立つ．　(証明終)

(2)　(i)　条件 $f(a)=g(a)$, $f(a+1)=g(a+1)$ から方程式 $f(x)-g(x)=0$ が $x=a$, $a+1$ を解にもつことが分かるので，

$$f(x)-g(x)=n(x-a)(x-a-1)$$

とおける．ここに $x=a+2$ を代入すると，

$$f(a+2)-g(a+2)=n\cdot 2\cdot 1$$

となり，これと条件 $f(a+2)=a+3$, $g(a+2)=-a-1$ から，

$$(a+3)-(-a-1)=2n\iff n=a+2$$

が成り立つ．従って，

$$f(x)-g(x)=(a+2)(x-a)(x-a-1)$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\int_{-3}^{3}f(x)dx+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\int_{-3}^{3}g(x)dx\\
&=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\{f(x)-g(x)\}\,dx\\
&=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}(a+2)(x-a)(x-a-1)dx\\
&=\frac{a+2}{6}\int_{-3}^{3}\{x^2-(2a+1)x+a(a+1)\}dx\\
&=\frac{a+2}{3}\int_{0}^{3}\{x^2+a(a+1)\}dx\\
&=\frac{a+2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3+a(a+1)x\right]_0^3\\
&=\boldsymbol{(a+2)(a^2+a+3)}\cdots①
\end{aligned}
$$

(ii)　a を定数とみる．$q=1-p$ であり，$q\geqq 0$ から $0\leqq p\leqq 1$ であるから，この範囲で p を変化させるときの $F(p,\ q)$ の最大最小を考える．

$$
\begin{aligned}
F(p,\ q)&=p\int_{-3}^{3}f(x)dx+(1-p)\int_{-3}^{3}g(x)dx\\
&=p\underbrace{\int_{-3}^{3}\{f(x)-g(x)\}\,dx}_{②}+\underbrace{\int_{-3}^{3}g(x)dx}_{③}
\end{aligned}
$$

となる．②, ③は定数である．また，

$$
\begin{aligned}
②&=\int_{-3}^{3}(a+2)(x-a)(x-a-1)dx\\
&=①\times 6\\
&=6(a+2)(a^2+a+3)
\end{aligned}
$$

である．a の値にかかわらず

$$a^2+a+3=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$$

であり，今 $a+2\fallingdotseq 0$ であるから，$F(p,\ q)$ は②を傾きとする p の 1 次関数となる．
$a+2>0$ のとき ②>0 であるから，最大値 $A=F(1,\ 0)$，最小値 $B=F(0,\ 1)$ より

$$A-B=6(a+2)(a^2+a+3)$$

$a+2<0$ のとき ②<0 であるから，最大値 $A=F(0,\ 1)$，最小値 $B=F(1,\ 0)$ より

$$A-B=-6(a+2)(a^2+a+3)$$

従って，

$$\boldsymbol{A-B=\begin{cases}\ \ 6(a+2)(a^2+a+3) & (a>-2\text{ のとき})\\ -6(a+2)(a^2+a+3) & (a<-2\text{ のとき})\end{cases}}$$

講評

$\boxed{1}$［整数，数列］((1) 標準 (2) 難) (1) は典型的な不定方程式の問題で，特殊解を見つける誘導もされており落とせない．(2) は数列の漸化式の問題のように見えて，本質は整数問題である．そこに気付かないと解けない．最後の問題も二項係数の和だと見抜けないと変形のしようがないので易しくはないだろう．

$\boxed{2}$［三角形，三角関数］(標準) 正弦定理を用いて PA，PB，PC の長さを求めることができれば，(4) までについては正確に計算をすれば難しくない．最悪，θ に適当な値を代入しても何とかなる．2010 年近畿大学医学部前期に類似した出題があった．この問題を練習した受験生はかなり有利だろう．

$\boxed{3}$［数 II の微積分］(やや難) 2 次関数を被積分関数として定積分で表された関数について，その変化などを考える問題．設定が複雑なので戸惑った受験生が多かったと思われる．$x=\alpha$, $x=\beta$ を解にもつ 2 次方程式が $m(x-\alpha)(x-\beta)=0$ となることをうまく使いたいが，慣れていないと難しいだろう．また (2)(ii) では $F(p,\ q)$ において変化するのは p だけだと捉えられるかがカギとなる．

例年に比べて解きにくい問題，記述の難しい問題が増えた．なじみのない傾向の問題に戸惑った受験生も多かったと思われる．$\boxed{1}$(1)，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$(1) で確実に得点し，$\boxed{1}$(2)，$\boxed{3}$(2) でどこまで立ち回れるかの勝負になるだろう．目標は 55%.