医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

近畿大学医学部(前期)　数学

2020年 1月26日実施

1 数列 $\{a_n\}$ を次のように，第 k 群が k 個の項を持つように分ける。

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 8,\ 11,\ 14 \mid 18,\ 22,\ 26,\ 30 \mid 35,\ 40, \cdots \mid \cdots$$

次の問いに答えよ。

(1) 第 k 群の末項を k を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $a_{100} = \boxed{\text{イ}}$ である。また，$a_n < 2020$ を満たす最大の n は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(3) 第 k 群に含まれる数の総和を k を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とすると，$S_{30} = \boxed{\text{オ}}$ である。

解答

ア $\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$　イ 945　ウ 166　エ $\dfrac{1}{3}k^2(k^2+2)$　オ 1956

解説

(1) 第 k 群の末項は，$k \geqq 2$ のとき，

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)}$$

$k=1$ のときもこれを満たす．

(2) まず，第 100 項が第何群にあるかを調べる．

$$1 + 2 + \cdots + 13 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 = 91$$
$$1 + 2 + \cdots + 13 + 14 = 105$$

より，第 100 項は第 14 群の 9 番目である．したがって，

$$a_{100} = \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + 14 \cdot 9 = \mathbf{945}$$

また，第 17 群の末項は $\dfrac{1}{6} \cdot 17 \cdot 18 \cdot 35 = 1785$ であり，$\dfrac{2020 - 1785}{18} = 13.05\cdots$ なので，$a_n < 2020$ を満たすのは，第 18 群の 13 番目までである．よって，求める最大の n は，

$$n = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 18 + 13 = \mathbf{166}$$

(3)　各群は等差数列になっており，第 k 群の初項は $\dfrac{1}{6}(k-1)k(2k-1)+k$，末項は $\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，項数は k なので，求める和は

$$\frac{k}{2}\left\{\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)+k+\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}k^2(k^2+2)}$$

(4)　$1+2+\cdots+7=28$ より，第 30 項は第 8 群の 2 番目である．

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{3}k^2(k^2+2)=\frac{1}{3}(1\cdot3+4\cdot6+9\cdot11+16\cdot18+25\cdot27+36\cdot38+49\cdot51)=1652$$

$$a_{29}=\frac{1}{6}\cdot7\cdot8\cdot15+8=148$$
$$a_{30}=a_{29}+8=156$$

より，$S_{30}=1652+148+156=\mathbf{1956}$.

2 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(\theta)=\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta$ を考える。$t=\cos\theta$ とおくとき，$\cos 3\theta$ および $\cos 2\theta\cos 4\theta$ を t の式で表せ。また，$f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ の値を求めよ。

(2) $7x+11y=2020$ $\cdots$(☆) とする。(☆) を満たす自然数 x と y の組の総数を求めよ。また，(☆) を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ に対して，$|-3x+7y|$ の最大値と最小値を求めよ。

解答

(1) $\cos 3\theta=4t^3-3t$, $\cos 2\theta\cos 4\theta=(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)$, $f\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{1}{8}$

(2) 27 組，最大値 1278，最小値 34

解説

(1) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\boldsymbol{4t^3-3t}$ である．また，

$$\cos 2\theta=2t^2-1$$
$$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2t^2-1)^2-1=8t^4-8t^2+1$$

より $\cos 2\theta\cos 4\theta=\boldsymbol{(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)}$ である．

$t=\cos\dfrac{\pi}{9}$ とすると $\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\left(3\cdot\dfrac{\pi}{9}\right)=4t^3-3t=\dfrac{1}{2}$ より $8t^3-6t-1=0$ が成り立っている．この式で割り算することにより

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{9}\right)&=t(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)\\ &=16t^7-24t^5+10t^3-t\\ &=\frac{1}{8}(8t^3-6t-1)(16t^4-12t^2+2t+1)+\frac{1}{8}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

別解 1

$$\begin{aligned} &\cos\frac{1}{9}\pi\cdot\cos\frac{2}{9}\pi\cdot\cos\frac{4}{9}\pi\\ =&\ \frac{1}{2}\cos\frac{1}{9}\pi\left(\cos\frac{6}{9}\pi+\cos\frac{2}{9}\pi\right)\\ =&\ \frac{1}{2}\cos\frac{1}{9}\pi\left(-\frac{1}{2}+\cos\frac{2}{9}\pi\right)\\ =&\ -\frac{1}{4}\cos\frac{1}{9}\pi+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{9}\pi\cdot\cos\frac{2}{9}\pi\\ =&\ -\frac{1}{4}\cos\frac{1}{9}\pi+\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3}{9}\pi+\cos\frac{1}{9}\pi\right)\\ =&\ \boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

別解 2

$0 \leqq \theta < \pi$ における $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$ の解は $3\theta = \dfrac{1}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi$ つまり $\theta = \dfrac{1}{9}\pi,\ \dfrac{5}{9}\pi,\ \dfrac{7}{9}\pi$ である．

従って $\cos\dfrac{1}{9}\pi, \cos\dfrac{5}{9}\pi\left(= -\cos\dfrac{4}{9}\pi\right), \cos\dfrac{7}{9}\pi\left(= -\cos\dfrac{2}{9}\pi\right)$ は $4t^3 - 3t = \dfrac{1}{2}$ の異なる 3 解になっている．

解と係数の関係より $\cos\dfrac{1}{9}\pi\cdot\cos\dfrac{5}{9}\pi\cdot\cos\dfrac{7}{9}\pi = \dfrac{1}{8}$, つまり $\cos\dfrac{1}{9}\pi\cdot\cos\dfrac{4}{9}\pi\cdot\cos\dfrac{2}{9}\pi = \boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$ である．

(2) $7x + 11y = 2020$ の特殊解として $(x,\ y) = (1,\ 183)$ が得られる．

そこで $7x + 11y = 2020$ と $7\cdot 1 + 11\cdot 183 = 2020$ を辺々引いて

$$7(x-1) + 11(y-183) = 0$$

を得る．これより $7(x-1) = 11(183-y)$ となるが，左辺は 7 の倍数，右辺は 11 の倍数で 7 と 11 は互いに素だから

$$7(x-1) = 11(183-y) = 7\cdot 11k\ (k \in \mathbf{Z})$$

と置くことができる．したがって整数としての一般解は

$$(x,\ y) = (1 + 11k,\ 183 - 7k)\ (k \in \mathbf{Z})$$

と表される．さらに $x,\ y$ は自然数であるから，$1 + 11k \geqq 1,\ 183 - 7k \geqq 1$ でなければならない．これより $0 \leqq k \leqq 26$ であり，答は **27 組**.

また，この一般解を使うと

$$|-3x + 7y| = |-3(1+11k) + 7(183-7k)| = |1278 - 82k|$$

である．$g(k) = 1278 - 82k$ と置くと $g(0) = 1278,\ g(26) = 854$ だから $|-3x+7y|$ は $k = 0$ のとき最大値 **1278** をとる．

また $g(k) = 0 \iff k = \dfrac{1278}{82} = 15.58\cdots$ だから $|-3x+7y|$ は $k = 16$ のとき最小値 $|-34| = \mathbf{34}$ をとる．

3 次の問いに答えよ。必要なら $\log_{10}2=0.30103,\ \log_{10}3=0.47712,\ \log_{10}7=0.84510$ を用いよ。

(1) 2020! の末尾に並ぶ 0 の個数を求めよ。

(2) 3^{2020} の桁数および先頭の数字を求めよ。

(3) 3^{2020} の下 3 桁を求めよ。

解答

(1) 2020! が $10=2\times5$ で何回割り切れるかを考えればよい．2020! が 2 で割り切れる回数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2020}{2^k}\right]=1010+505+252+126+63+31+15+7+3+1=2013\ \text{回}$$

2020! が 5 で割り切れる回数は,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2020}{5^k}\right]=404+80+16+3=503\ \text{回}$$

であるから，2020! は 10 で 503 回だけ割り切れる．したがって答は **503 個** である．

(2) $\log_{10}3^{2020}=2020\log_{10}3=2020\times0.47712=963.7824\cdots$① であるから，$3^{2020}$ は **964 桁** である．また,

$$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.77815$$

であるから，①の小数部分に注目すると $\log_{10}6<0.7824<\log_{10}7$ なので，先頭の数字は **6** である．

(3) 3^{2020} を 1000 で割った余りを調べればよい．$3^{2020}=9^{1010}=(10-1)^{1010}$ を二項展開する．以下，合同式は 1000 を法とするものとする．

$$\begin{aligned}(10-1)^{1010}&\equiv {}_{1010}\mathrm{C}_2 10^2(-1)^{1008}+{}_{1010}\mathrm{C}_1 10^1(-1)^{1009}+{}_{1010}\mathrm{C}_0 10^0(-1)^{1010}\\&\equiv 505\cdot1009\cdot100-1010\cdot10+1\\&\equiv 5\cdot9\cdot100-100+1\\&\equiv 4500-100+1\\&\equiv 500-100+1\\&\equiv 401\end{aligned}$$

したがって 3^{2020} の下 3 桁は **401** である．

別解

まず,

$$3^2\equiv9\equiv1\pmod 8$$

より

$$3^{2020}\equiv(3^2)^{1010}\equiv1\pmod 8$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
3^5 &\equiv 243 \equiv -7 \pmod{125} \\
3^{10} &\equiv (-7)^2 \equiv 49 \pmod{125} \\
3^{20} &\equiv 49^2 \equiv (50-1)^2 \equiv 2500-100+1 \equiv -99 \equiv 26 \pmod{125} \\
3^{40} &\equiv 26^2 \equiv (25+1)^2 \equiv 625+50+1 \equiv 51 \pmod{125} \\
3^{50} &\equiv 51 \cdot 49 \equiv (50+1)(50-1) \equiv 2500-1 \equiv -1 \pmod{125}
\end{aligned}
$$

より

$$3^{2020} \equiv (3^{50})^{40} \cdot 3^{20} \equiv (-1)^{40} \cdot 26 \equiv 26 \pmod{125}$$

であるが，125 を法として 26 と合同なのは，

$$26,\ 151,\ 276,\ 401,\ \cdots$$

であり，$401 \equiv 1 \pmod 8$ なので，$3^{2020} \equiv 401 \pmod{1000}$ である（中国人の剰余定理）．
したがって，3^{2020} の下 3 桁は **401** である．

解説

　オイラーの定理より $3^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ がわかるので，3^{50} あたりを目指して見るのがよい．

的中!!

直前授業（1 月 24 日、入試の 2 日前！）

問題 1

(1)　3^{200} を 7 で割ったときの余りはいくらか？

(2)　3^{200} を 10 で割ったときの余りはいくらか？

(3)　$\dfrac{3^{200}}{7}$ の 1 の位の数はいくらか？

問題 2　2019^{2019} の一の位の数字および十の位の数字を求めよ。

講評

$\boxed{1}$［群数列］（やや難）(1) が解ければ，残りは典型的な群数列の問題なので解法に迷うことはない．しかし計算が煩雑すぎて時間内に正解を求めるのは難しい．

$\boxed{2}$［三角関数，整数］((1) やや難，(2) 標準）(1) の三角関数は難しい．前半の 3 倍角，4 倍角の公式は導けるだろうが，それを使うと後半が大変になる．誘導を無視して独自に解く方が正解にたどり着けるのだが，それでも容易ではない．(2) は典型的な問題で，不定方程式の一般解を媒介変数表示して考えるのが定石．

$\boxed{3}$［整数，桁数］((1)(2) 標準，(3) やや難）記述形式である $\boxed{3}$ で整数問題が出題されるのは珍しい．(1)(2) は基本問題なので落とせない．(3) は二項展開で解くとよいが，気付けた受験生は多くはないだろう．

昨年度に比べると，作業の分量が非常に増え全体として難化している．$\boxed{1}$ で方針が立ったものを正確に解ききり，$\boxed{2}$ (1) 前半と (2)，$\boxed{3}$ (1)(2) を正解したい．目標は 50%.

メルマガ無料登録で全教科配信！ 本解答速報の内容に関するお問合せはメビオ 0120-146-156 まで

☎03-3370-0410
受付時間 8～20時 土日祝可
https://yms.ne.jp/
東京都渋谷区代々木 1-37-14

医学部専門予備校 YMS
heart of medicine

医学部進学予備校 メビオ

0120-146-156
携帯からOK 受付時間 9～21時 土日祝可
https://www.mebio.co.jp/
大阪市中央区石町2-3-12ベルヴォア天満橋