解答速報

川崎医科大学　数学

2020年 1月26日実施

1　i を虚数単位とし，$\alpha = 3 + 2i$，$\beta = 4 + 7i$ とする。複素数平面において，原点を O とし，α，β を表す点を，それぞれ A(α)，B(β) とする。3 点 O，A，B を通る円の中心を P(z) とする。

(1)　$|\alpha|^2 = \boxed{\text{アイ}}$，$|\beta|^2 = \boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha} = \boxed{\text{オ}} + i$ が成り立つから，

$$\cos\angle\text{AOB} = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

$$\sin\angle\text{AOB} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(3)　$\angle\text{APB} = \boxed{\text{シ}}\angle\text{AOB}$ であるから，

$$\cos\angle\text{APB} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},$$

$$\sin\angle\text{APB} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

したがって，

$$\frac{\beta - z}{\alpha - z} = \frac{\boxed{\text{チ}} + \boxed{\text{ツ}}\,i}{\boxed{\text{テ}}}$$

が成り立つ。

これを z について解くと

$$z = \frac{-\boxed{\text{ト}} + \boxed{\text{ナニ}}\,i}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

となる。

解答

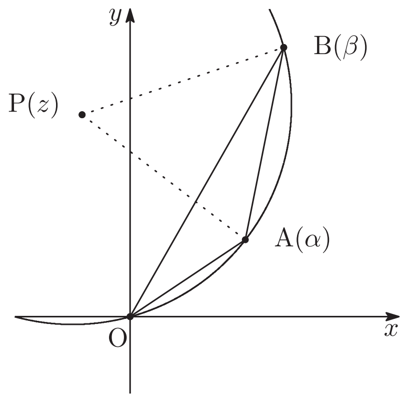
解答記号	正解
アイ	13
ウエ	65
オ	2
$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\sqrt{\text{ク}}$	$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$
$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}\sqrt{\text{サ}}$	$\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$
シ	2

解答記号	正解
$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\dfrac{3}{5}$
$\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$	$\dfrac{4}{5}$
$\dfrac{\text{チ}+\text{ツ}\,i}{\text{テ}}$	$\dfrac{3+4i}{5}$
$\dfrac{-\text{ト}+\text{ナニ}\,i}{\text{ヌ}}$	$\dfrac{-3+11i}{2}$

解説

(1) $|\alpha|^2 = 3^2 + 2^2 = \mathbf{13}$, $|\beta|^2 = 4^2 + 7^2 = \mathbf{65}$

(2)



$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4+7i}{3+2i} = \frac{(4+7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$
$$= \boldsymbol{2+i}$$

したがって $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{5}$ である．$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，A, B の位置関係から $0 < \arg\dfrac{\beta}{\alpha} < \dfrac{\pi}{2}$ と考えてよいので，

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{5}\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

であることが分かる．これと $2+i$ が一致することから

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \cos\theta = \boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt{5}},\quad \sin\angle\mathrm{AOB} = \sin\theta = \boldsymbol{\frac{1}{5}\sqrt{5}}$$

である．

(3) 円における中心角と円周角の関係から，$\boldsymbol{\angle\mathrm{APB} = 2\angle\mathrm{AOB}} = 2\theta$ となる．したがって倍角の公式から

$$\cos\angle\mathrm{APB} = \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

$$\sin\angle\mathrm{APB} = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{2}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{5} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

P は題意の円の中心なので $\left|\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}\right| = \dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = 1$ であることに注意すると，

$$\frac{\beta-z}{\alpha-z} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = \boldsymbol{\frac{3+4i}{5}}$$

が成り立つ．これより，

$$
\begin{aligned}
& 5(\beta - z) = (3+4i)(\alpha - z) \\
\iff\ & 5\beta - (3+4i)\alpha = (2-4i)z \\
\iff\ & 19 + 17i = 2(1-2i)z \\
\iff\ & z = \frac{19+17i}{2(1-2i)} = \boldsymbol{\frac{-3+11i}{2}}
\end{aligned}
$$

別解

題意の円の中心を求めるには，xy 平面上で考えてもよい．円 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ が 3 点 O$(0,\ 0)$, A$(3,\ 2)$, B$(4,\ 7)$ を通ることから $a,\ b,\ c$ を決定できる．あるいは，線分 OA, OB, AB のうち 2 本について垂直二等分線を求めて連立してもよい．

2 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=-6,\ a_{n+1}=2a_n+|a_n|+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=4-\frac{n+4}{n+2}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす。

(1) $a_2=-\boxed{ア}$, $a_7=\boxed{イ}$ である。

(2) $n \geqq 7$ のとき

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\boxed{ウ}^{n-\boxed{エ}}-\boxed{オ}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{4}\left(\boxed{カ}^{n-\boxed{キ}}-\boxed{ク}n-\boxed{ケコ}\right)$$

である。

(3) $b_1=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ であり，$n \geqq 2$ のとき，

$$\frac{b_n}{n+\boxed{ス}}=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\cdot\frac{b_{n-1}}{n+\boxed{タ}}$$

であるから，$n \geqq 1$ のとき $b_n=\left(n+\boxed{チ}\right)\left(\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)^n$ である。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}b_nb_{n+1}}=\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ が成り立つ。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(2a_n+1)b_n}=\boxed{ニ}$,

$\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty}\frac{n+2}{(2a_n+1)b_n}=\boxed{ヌネノ}$ である。

解答

解答記号	正解
$-$ア	-5
イ	0
ウ$^{n-エ}-$オ	$3^{n-7}-1$
カ$^{n-キ}-$ク$\,n-$ケコ	$3^{n-6}-2n-73$
$\dfrac{サ}{シ}$	$\dfrac{3}{2}$

解答記号	正解
$\dfrac{b_n}{n+ス}=\dfrac{セ}{ソ}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{n+タ}$	$\dfrac{b_n}{n+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{n+1}$
$(n+チ)\left(\dfrac{ツ}{テ}\right)^n$	$(n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
$\dfrac{ト}{ナ}$	$\dfrac{2}{3}$
ニ	0
ヌネノ	384

解説

(1) 漸化式を使って順次求めると $a_1=-6,\ \boldsymbol{a_2=-5},\ a_3=-4,\ a_4=-3,\ a_5=-2,\ a_6=-1,\ \boldsymbol{a_7=0}.$

(2) $n \geqq 7$ のとき $a_n \geqq 0$ が成り立つので，$a_{n+1}=3a_n+1$ となる.

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=3^2\left(a_{n-1}+\frac{1}{2}\right)=\cdots=3^{n-6}\left(a_7+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-6}$$

これより $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-7}-\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(3^{n-7}-1)}.$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=7}^{n}\left(\frac{1}{2}\cdot 3^{n-7}-\frac{1}{2}\right)\\&=-(6+5+4+3+2+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{n-6}-1}{3-1}-\frac{1}{2}(n-6)\\&=-21+\frac{1}{4}(3^{n-6}-1)-\frac{1}{2}n+3\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(3^{n-6}-2n-73\right)}\end{aligned}$$

(3) $b_1=S_1=4-\dfrac{5}{3}b_1$ より $b_1=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}.$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}&S_n-S_{n-1}=\left(4-\frac{n+4}{n+2}b_n\right)-\left(4-\frac{n+3}{n+1}b_{n-1}\right)\\\iff\ &b_n=-\frac{n+4}{n+2}b_n+\frac{n+3}{n+1}b_{n-1}\\\iff\ &\frac{2}{n+2}b_n=\frac{1}{n+1}b_{n-1}\\\iff\ &\boldsymbol{\frac{b_n}{n+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b_{n-1}}{n+1}}\end{aligned}$$

これにより，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n+2}\right\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるので，

$$\frac{b_n}{n+2}=\frac{b_1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\iff \boldsymbol{b_n=(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

(4) $2^{2n}b_nb_{n+1}=2^{2n}\cdot(n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\cdot(n+3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{2}(n+2)(n+3)$ より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}b_nb_{n+1}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+2)(k+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

(5)　$n \to \infty$ なので $n \geqq 7$ として考えると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2a_n+1)b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^{n-7}\cdot(n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} 2^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-7} = \mathbf{0}$$

また

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n+2}{(2a_n+1)b_n} = \sum_{n=7}^{\infty} 2^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-7} = \frac{128}{1-\dfrac{2}{3}} = \mathbf{384}$$

3 a を正の定数とし，$f(x)=3xe^{-ax}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $y=f(x)$ のグラフが，点 $(1,\ 1)$ を通るとき，$a=\log$ $\boxed{ア}$ であり，

点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$a=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\log$ $\boxed{エ}$ である。ただし，$\log$ は自然対数を表す。

(2) $f(x)$ の導関数と不定積分は，それぞれ，

$$f'(x)=\boxed{オ}(\boxed{カ}\boxed{キ}ax)e^{-ax}$$
$$\int f(x)\,dx=-\boxed{ク}(\boxed{ケ}\boxed{コ}ax)a^{-\boxed{サ}}e^{-ax}+C$$

である。ただし $\boxed{キ}$ と $\boxed{コ}$ は，それぞれ，符号 $+$，$-$ のいずれかであり，C は積分定数である。

(3) $y=f(x)$ が $x=X$ のとき最大値 M をとるとする。点 $(X,\ M)$ は a の値にかかわらず直線 $y=\dfrac{\boxed{シ}}{e}x$ 上にある。この直線を l とするとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 l で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{ス}}{a^2}\left(1-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}e}\right)$$

である。

解答

解答記号	正解
ア	3
$\dfrac{イ}{ウ}\log エ$	$\dfrac{1}{2}\log 6$
オ (カキ ax)e^{-ax}	$3(1-ax)e^{-ax}$
$-$ク (ケコ ax)$a^{-サ}e^{-ax}$	$-3(1+ax)a^{-2}e^{-ax}$
$\dfrac{シ}{e}x$	$\dfrac{3}{e}x$
$\dfrac{ス}{a^2}\left(1-\dfrac{セ}{ソ\,e}\right)$	$\dfrac{3}{a^2}\left(1-\dfrac{5}{2e}\right)$

解説

(1) $y=f(x)$ のグラフが $(1,\ 1)$ を通るとき，$f(1)=1$ であるから，

$$3e^{-a}=1 \iff e^a=3 \iff a=\mathbf{\log 3}$$

$y=f(x)$ のグラフが $(2,\ 1)$ を通るとき，$f(2)=1$ であるから，

$$6e^{-2a}=1 \iff e^{2a}=6 \iff 2a=\log 6 \iff a=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 6}$$

(2) 導関数 $f'(x)$ について，

$$f'(x)=3(xe^{-ax})'=3\left\{1\cdot e^{-ax}+x\cdot(-ae^{-ax})\right\}=\boldsymbol{3(1-ax)e^{-ax}}$$

不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ について，部分積分法により，

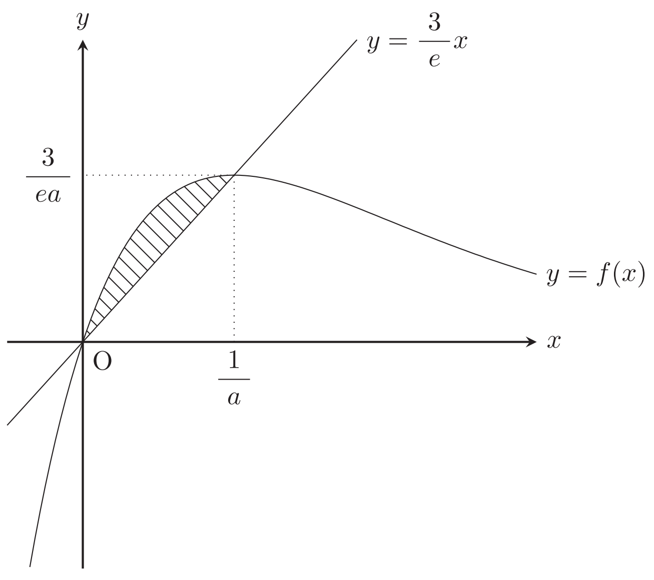
$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= 3\int xe^{-ax}\,dx \\
&= 3\left\{x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)-\int\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)\,dx\right\} \\
&= 3\left(-\frac{1}{a}xe^{-ax}-\frac{1}{a^2}e^{-ax}\right)+C \\
&= -3\left(\frac{ax+1}{a^2}\right)e^{-ax}+C \\
&= \boldsymbol{-3(1+ax)a^{-2}e^{-ax}}+C\ \left(=-\frac{3}{a^2}(1+ax)e^{-ax}+C\right)
\end{aligned}$$

(3)　点 $(X,\ M)$ について，(2) で求めた導関数により，$y=f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{ea}$	$\searrow$	0

この結果より $y=f(x)$ は $x=\dfrac{1}{a}$ のときに最大値 $\dfrac{3}{ea}$ をとることが分かり，題意より $X=\dfrac{1}{a}$，$M=\dfrac{3}{ea}$ となる．よって a を消去することで $M=\dfrac{3}{e}X$ の関係が成立し，点 $(X,\ M)$ は a の値に関わらず直線 $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{e}x}$ 上に存在することになる．

$y=f(x)$ のグラフと直線 $l:y=\dfrac{3}{e}x$ で囲まれた部分の面積について，該当する領域は図の斜線部となる．



よって求める面積を S とすると，(2) で求めた不定積分により，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{1}{a}} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{3}{ea} \\
&= \left[-\frac{3}{a^2}(1+ax)e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{3}{2ea^2} \\
&= -\frac{3}{a^2}\left(\frac{2}{e}-1\right) - \frac{3}{2ea^2} \\
&= \frac{3}{a^2}\left(-\frac{2}{e}+1-\frac{1}{2e}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{a^2}\left(1-\frac{5}{2e}\right)}
\end{aligned}
$$

講評

$\boxed{1}$［複素数平面］（標準）複素数平面上の図形に関する問題．(1) は易しい．(2) も基本的なのだが，偏角が有名角ではないので戸惑った受験生が多いかもしれない．(3) は最後に少し面倒な計算を要するが，(2) が解けていれば難しくない．手早く完答して次に進みたい．

$\boxed{2}$［数列（漸化式），極限］（標準）$\{a_n\}$ は $n=7$ を境に一般項が異なる数列であり，戸惑った受験生も多いかも知れない．ただ，そこで躓いても (3)(4) は関係なく解けるのでここは押さえたい．

$\boxed{3}$［数学Ⅲの微積分］（やや易）微分・積分計算，最大値，面積の基本的な問題．計算も難しくないのでここで点を稼ぎたい．

昨年度と比較すると分量が減っている．$\boxed{2}$ および $\boxed{3}$(3) の計算が少々煩雑であること以外は作業は面倒ではない．$\boxed{1}$(2) や $\boxed{2}$(2) が突破できれば数学でリードをとれるだろう．目標点は 70%.