医学部専門予備校 YMS heart of medicine × 医学部進学予備校 メビオ

解答速報

関西医科大学（後期）　数学

2020年 2月29日実施

I　(1)〜(3) の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = 4\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta - 4\cos\theta - 4\sin\theta$ は $\theta = \boxed{\text{ア}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$\theta = \boxed{\text{ウ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2)　$3x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 2$ を因数分解すると，$\boxed{\text{オ}}$ である。
$3x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 4 = 0$ を満たす整数 x，y の値の組をすべて求めると，$(x,\ y) = \boxed{\text{カ}}$ となる。

(3)　$f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$ とするとき，$f'(x) = \boxed{\text{キ}}$ である。k を実数とするとき，x の方程式 $ke^x = x^2 + 3x + 1$ が，異なる 3 つの実数解を持つための k の条件は $\boxed{\text{ク}}$ である。

解答

(1)　ア．π　イ．4　ウ．$\dfrac{7}{12}\pi$　エ．$-3\sqrt{2}$

(2)　オ．$(3x - 2y + 2)(x + y - 1)$　カ．$(-1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，

(3)　キ．$-(x + 2)(x - 1)e^{-x}$　ク．$0 < k < \dfrac{5}{e}$

解説

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく．$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ と $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である．
また $\cos\theta\sin\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ であるので，

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{2}(t^2 - 1) - 4t \\ &= 2\sqrt{2}\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

と表せる．これより $t = -1$ すなわち $\theta = \boldsymbol{\pi}$ のとき y は最大値 $\mathbf{4}$ をとり，$t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ すなわち $\theta = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi}$ のとき y は最小値 $\boldsymbol{-3\sqrt{2}}$ をとる．

(2)　x について整理すると，

$$\begin{aligned} 3x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 2 &= 3x^2 + (y - 1)x - 2(y - 1)^2 \\ &= \{3x - 2(y - 1)\}\{x + (y - 1)\} \\ &= \boldsymbol{(3x - 2y + 2)(x + y - 1)} \end{aligned}$$

である．また，

$$3x^2 + xy - 2y^2 - x + 4y - 4 = 0 \iff (3x - 2y + 2)(x + y - 1) = 2$$

である．$A = 3x - 2y + 2$，$B = x + y - 1$ とおくと $AB = 2$ となる．さらに，$A + 2B = 5x$，$A - 3B = -5(y - 1)$

より $A+2B$ と $A-3B$ がともに 5 の倍数となることに注意すると，以下の表より $(x,\ y) = \boldsymbol{(-1,\ 0),\ (1,\ 2)}$ となる．

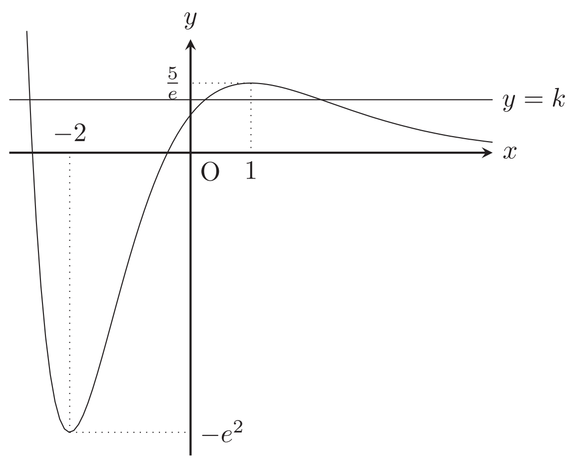
A	B	$A+2B$	$A-3B$	$(x,\ y)$
-2	-1	-4	1	$-$
-1	-2	-5	5	$(-1,\ 0)$
1	2	5	-5	$(1,\ 2)$
2	1	4	-1	$-$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x+1)(-e^{-x}) \\ &= \boldsymbol{-(x+2)(x-1)e^{-x}} \end{aligned}$$

である．また，$ke^x = x^2+3x+1 \iff k = (x^2+3x+1)e^{-x}$ であるが，この方程式の実数解の個数は，$y=k$ と $y=f(x)$ のグラフの共有点の個数に等しい．$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x+1)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ であり，また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$（下の注釈を参照）であるから，$y=f(x)$ の増減表は以下のようになる．よって，求める k の条件は $\boldsymbol{0<k<\dfrac{5}{e}}$ である．

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{e}$	$\searrow$	0



注釈

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であることを示すには，$x>0$ のとき $e^x > \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1>0$ であることを示したのち，x が十分大きいとき

$$0 < \frac{x^2+3x+1}{e^x} < \frac{x^2+3x+1}{\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{2}+x+1}$$

であることから「はさみうちの原理」を用いる方法などが考えられる．しかし本問では論述の必要がないため，本番の試験では，指数関数と多項式関数の発散の「強弱」から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^x}=0$ とするのがよいだろう．

II　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 10a_{n+1} + 51a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の設問に答えよ。なお，(2), (3) の設問は解答を求める過程も記述すること。

(1)　$a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ。(答えだけを指定欄に記入すること。)

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　a_n を 10 で割った余りを b_n とする。m を正の整数として $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m} b_k$ を求めよ。

解答

(1)　$a_3 = 10a_2 + 51a_1 = \mathbf{10},\ a_4 = 10a_3 + 51a_2 = \mathbf{151},\ a_5 = 10a_4 + 51a_3 = \mathbf{2020}.$

(2)　$x^2 - 10x - 51 = 0$ を解くと $x = 5 \pm 2\sqrt{19}$. これらを $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと与漸化式は以下のように変形できる.

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ①$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots ②$$

今，$a_2 - \alpha a_1 = 1,\ a_2 - \beta a_1 = 1$ であるから，①, ② より

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}$$

となる．これらを辺々引くと

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^{n-1} - \alpha^{n-1}$$

$$\iff \boldsymbol{a_n = \frac{\sqrt{19}}{76}\left\{\left(5 + 2\sqrt{19}\right)^{n-1} - \left(5 - 2\sqrt{19}\right)^{n-1}\right\}}$$

(3)　以下，合同式は 10 を法とするものとする.

$$a_{n+2} = 10a_{n+1} + 51a_n \equiv a_n$$

であるから，k を自然数として，

$$a_{2k-1} \equiv a_{2k-3} \equiv \cdots \equiv a_1 = 0$$

$$a_{2k} \equiv a_{2k-2} \equiv \cdots \equiv a_2 = 1$$

となる．したがって $b_{2k-1} = 0,\ b_{2k} = 1$ であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2m} b_k &= \sum_{k=1}^{m}(b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} 1 \\ &= \boldsymbol{m}\end{aligned}$$

III O を原点とする座標空間に 4 点 A$(5,\ 2,\ -5)$, B$(7,\ 4,\ -4)$, C$(-5,\ 10,\ -1)$, D$(1,\ 10,\ -4)$ がある。点 A と点 B を通る直線を l, 点 C と点 D を通る直線を m とする。l 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさが最小となるように定める。また l 上の点 Q と m 上の点 R を，直線 QR が直線 l と m のいずれにも直交するようにとる。さらに原点 O から △PQR を含む平面に垂線を下ろし，その平面との交点を H とする。以下の設問に答えよ。

(1) 点 P, Q, R, H の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 線分 OP, PQ, QR, OH の長さをそれぞれ求めよ。

(3) △PQR の面積と四面体 OPQR の体積を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1) P$(3,\ 0,\ -6)$, Q$(9,\ 6,\ -3)$, R$(7,\ 10,\ -7)$, H$(4,\ -2,\ -4)$

(2) $\mathrm{OP}=3\sqrt{5}$, $\mathrm{PQ}=9$, $\mathrm{QR}=6$, $\mathrm{OH}=6$

(3) △PQR の面積は 27，四面体 OPQR の体積は 54

$\boxed{\text{解説}}$

(1) s を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2s+5,\ 2s+2,\ s-5)$$

とおける．$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が直線 l と垂直になるときであるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 &\iff (2s+5,\ 2s+2,\ s-5)\cdot(2,\ 2,\ 1)=0\\ &\iff s=-1\end{aligned}$$

が得られるので，**P(3, 0, −6)** である．

次に，$t,\ u$ を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2t+5,\ 2t+2,\ t-5),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2u-5,\ 10,\ -u-1)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ は l にも m にも垂直なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 &\iff (2u-2t-10,\ -2t+8,\ -u-t+4)\cdot(2,\ 2,\ 1)=0\\ &\iff u=3t\cdots①\\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0 &\iff (2u-2t-10,\ -2t+8,\ -u-t+4)\cdot(2,\ 0,\ -1)=0\\ &\iff 5u-3t-24=0\cdots②\end{aligned}$$

①，②を解いて，$(t,\ u)=(2,\ 6)$ となるので，**Q(9, 6, −3)**，**R(7, 10, −7)** である．

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp l$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp l$ より O から平面 PQR に下ろした垂線との交点 H は，P を通り $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ に平行な直線上にあることがわかるので，p を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{p}{2}\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(-p+3,\ 2p,\ -2p-6)$$

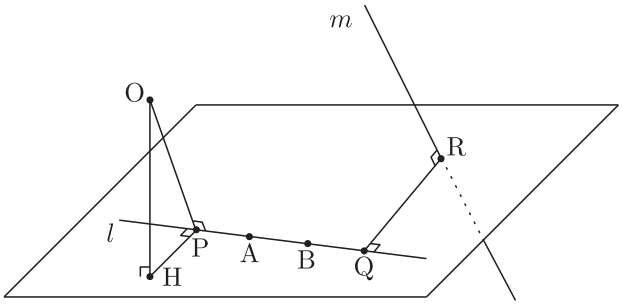
とおける．このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0 &\iff (-p+3,\ 2p,\ -2p-6)\cdot(-2,\ 4,\ -4)=0\\ &\iff p=-1\end{aligned}$$

となるので，$\mathbf{H(4,\ -2,\ -4)}$ である．

(2)　(1) より $\mathrm{OP}=\mathbf{3\sqrt{5}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(6,\ 6,\ 3)$ より $\mathrm{PQ}=\mathbf{9}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(-2,\ 4,\ -4)$ より $\mathrm{QR}=\mathbf{6}$，$\mathrm{OH}=\mathbf{6}$ である．

(3)　$\triangle\mathrm{PQR}$ は $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形なのでその面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\mathbf{27}$ である．また，四面体 OPQR の体積は底面を $\triangle\mathrm{PQR}$ と考えると高さが OH となるので，$\dfrac{1}{3}\cdot 27\cdot 6=\mathbf{54}$ である．



IV　$a,\ r$ を定数とする。xy 平面上に $y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2+a$ で表される曲線 C と，x 軸と y 軸に接している半径 r の円 D がある。いま，曲線 C と円 D がただ1つの共有点を持ち，その共有点の x 座標が1であるとき，a と r の値の組をすべて求めよ。
なお，解答を求める過程も記述すること。

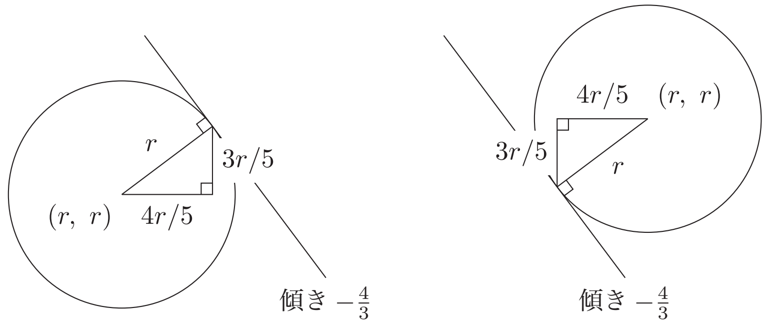
解答

曲線 C と円 D がただ一つの共有点を持つ場合，二曲線はその点において互いに接する．従ってその点における各曲線の接線の傾きが等しい．

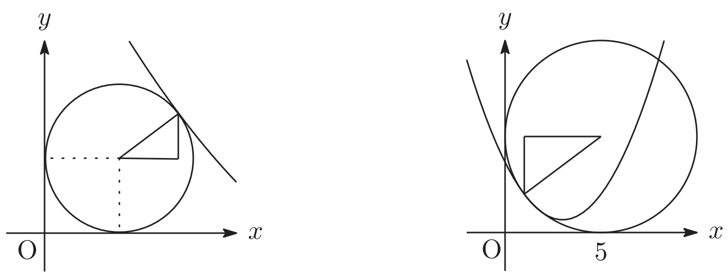
$f(x)=\dfrac{1}{3}(x-3)^2+a$ と置く．$f'(x)=\dfrac{2}{3}(x-3)$ である．$(1,\ f(1))$ が共有点であり，その点における傾きは $f'(1)=-\dfrac{4}{3}$ である．

(i)　D の中心が第一象限にある場合

D の方程式は $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ である．



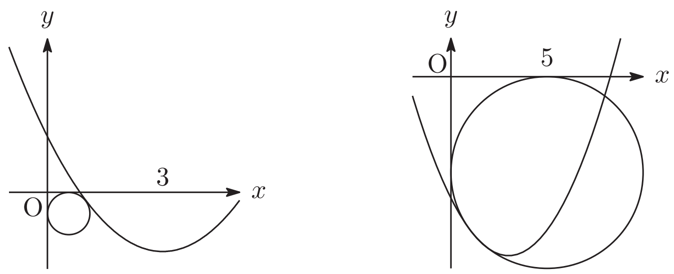
円の接線の傾きが $-\dfrac{4}{3}$ になるのは，接点が $(r,\ r)\pm\left(\dfrac{4}{5}r,\ \dfrac{3}{5}r\right)$ のいずれかの場合であることが上の図よりわかる．接点の x 座標を考えて $r\pm\dfrac{4}{5}r=1$ つまり $r=\dfrac{5}{9}$ または $r=5$ である．



$r=\dfrac{5}{9}$ の場合は明らかに共有点は一つである（左図）．この場合共有点が $\left(1,\ \dfrac{8}{9}\right)$ になるので，$f(1)=\dfrac{8}{9}$ より $a=-\dfrac{4}{9}$.

$r=5$ の場合，放物線の軸が $x=3$ なので，C と D は接点以外の共有点を持ってしまい不適になる（右図）．

(ii)　D の中心が第四象限にある場合



(i) のグラフを y 軸方向に $-2r$ 平行移動したものになっている．従って $r=\dfrac{5}{9}$ または $r=5$ であり，$r=5$ はやはり不適である．$r=\dfrac{5}{9}$ の場合共有点が $\left(1,\ -\dfrac{2}{9}\right)$ になるので，$f(1)=-\dfrac{2}{9}$ より $a=-\dfrac{14}{9}$.

以上より答は $(a,\ r)=\boldsymbol{\left(-\dfrac{4}{9},\ \dfrac{5}{9}\right),\ \left(-\dfrac{14}{9},\ \dfrac{5}{9}\right)}$.

$\boxed{\text{別解}}$

$y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2+a$ と $(x-r)^2+(y\pm r)^2=r^2$ から y を消去し，出来た x の 4 次方程式が $x=1$ を重解に持つ条件を求めると次のようになる．

$g(x)=(x-r)^2+\left\{\dfrac{1}{3}(x-3)^2+a\pm r\right\}^2-r^2$ と置くと．

$$g(1)=0 \text{ より } (1-r)^2+\left\{\frac{1}{3}(1-3)^2+a\pm r\right\}^2-r^2=0\cdots①$$

$$g'(1)=0 \text{ より } 2(1-r)+2\left\{\frac{1}{3}(1-3)^2+a\pm r\right\}\cdot\frac{2}{3}(1-3)=0\cdots②$$

である．②を変形すると

$$\frac{1}{3}(1-3)^2+a\pm r=\frac{3}{4}(1-r)\cdots③$$

となる．これを ① に代入すると

$$\begin{aligned}&(1-r)^2+\left\{\frac{3}{4}(1-r)\right\}^2-r^2=0\\ \iff\ &25(1-r)^2=16r^2\\ \iff\ &r=5,\ \frac{5}{9}\end{aligned}$$

が得られる．

(i)　$r=5$ のとき，③より $a\pm r=-\dfrac{13}{3}$．このとき，

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-5)^2+\left\{\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{13}{3}\right\}-25\\ &=\frac{1}{9}(x^4-12x^3+37x^2-42x+16)\\ &=\frac{1}{9}(x-1)^2(x-2)(x-8)\end{aligned}$$

となるので共有点が 3 個であり不適.

(i)　$r=\dfrac{5}{9}$ のとき，③より $a\pm r=-1$．このとき，

$$g(x)=\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\left\{\frac{1}{3}(x-3)^2-1\right\}-\frac{25}{81}$$

$$= \frac{1}{9}(x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 72x + 36)$$
$$= \frac{1}{9}(x-1)^2(x^2 - 10x + 36)$$

となるので共有点がただ 1 つであり適する．このとき，$a = -\dfrac{14}{9},\ -\dfrac{4}{9}$ である．

以上より答は $(a,\ r) = \boldsymbol{\left(-\dfrac{4}{9},\ \dfrac{5}{9}\right),\ \left(-\dfrac{14}{9},\ \dfrac{5}{9}\right)}$．

講評

Ⅰ［小問集合］（やや易〜標準）

(1)　三角関数の最大最小．$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと t の 2 次関数に帰着する．

(2)　(1 次式の積) = (整数の定数) となるタイプの整数問題．

(3)　指数関数を含む方程式の解の個数．

いずれも典型問題であり落とせない．

Ⅱ［数列，整数］（標準）隣接 3 項間漸化式．(2) では係数が無理数になるので，適当に文字でおいた上で計算するとよい．(3) は 1 項おきに余りが等しくなることに気付けば結果を求めるのは難しくない．記述形式なのでしっかりと議論する必要があるが，できれば完答したい．

Ⅲ［空間座標］（標準）(1) は直交条件から内積計算をすることになる．P, Q, R の座標を求める作業は典型なので落としたくない．H はオーソドックスに平面の方程式を用いてもよいが，PH // QR に気付くと楽に求まる．(3) △PQR が直角三角形であることを使って要領よく求めたい．部分点がないので慎重さを要する．

Ⅳ［図形と方程式］（難）図形的な関係に気付かず式だけで解こうとすると大変なことになるだろう．また，二曲線が接する条件だけで満足してしまい共有点がただ一つであることを見落とす罠もある．記述も容易ではなくなかなかの難問である．

2020 年前期と同様，空所補充など答だけを書く形式と記述形式がミックスされている．2019 年後期と比較すると易化している．Ⅰ, Ⅱ, Ⅲを完答に近いところまで仕上げ，Ⅳで方針などの部分点をとりたいところ．目標点は 80%．